Breve storia infinita

Enrico Miglierina

Università Cattolica del Sacro Cuore - Milano

18 gennaio 2022

"C'è un concetto che corrompe e altera tutti gli altri. Non parlo del Male, il cui limitato impero è l'Etica; parlo dell'Infinito"
J.L. Borges

Parte 1

Sommare infiniti numeri

Il quadro iniziale

- Pitagora e i pitagorici (circa 500 a.C.) ponevano a base di tutto il numero (con tutta la sua pluralità).
- Parmenide d'Elea (circa 450 a.C.) critica fortemente questa convinzione contrapponendogli l'unità e la permanenza dell'essere.
- Zenone d'Elea (circa 450 a.C.) discepolo di Parmenide formulò alcuni paradossi che volevano mostrare la contraddittorietà nascosta nei concetti di molteplicità e divisibilità.
- Due paradossi tra i più famosi sono quello della "dicotomia" e quello di "Achille e la tartaruga" (equivalenti tra loro). Qui ne consideriamo una versione equivalente ma più semplice da visualizzare.

Il quadro iniziale

- Pitagora e i pitagorici (circa 500 a.C.) ponevano a base di tutto il numero (con tutta la sua pluralità).
- Parmenide d'Elea (circa 450 a.C.) critica fortemente questa convinzione contrapponendogli l'unità e la permanenza dell'essere.
- Zenone d'Elea (circa 450 a.C.) discepolo di Parmenide formulò alcuni paradossi che volevano mostrare la contraddittorietà nascosta nei concetti di molteplicità e divisibilità.
- Due paradossi tra i più famosi sono quello della "dicotomia" e quello di "Achille e la tartaruga" (equivalenti tra loro). Qui ne consideriamo una versione equivalente ma più semplice da visualizzare.

Il quadro iniziale

- Pitagora e i pitagorici (circa 500 a.C.) ponevano a base di tutto il numero (con tutta la sua pluralità).
- Parmenide d'Elea (circa 450 a.C.) critica fortemente questa convinzione contrapponendogli l'unità e la permanenza dell'essere.
- Zenone d'Elea (circa 450 a.C.) discepolo di Parmenide formulò alcuni paradossi che volevano mostrare la contraddittorietà nascosta nei concetti di molteplicità e divisibilità.
- Due paradossi tra i più famosi sono quello della "dicotomia" e quello di "Achille e la tartaruga" (equivalenti tra loro). Qui ne consideriamo una versione equivalente ma più semplice da visualizzare.

Il quadro iniziale

- Pitagora e i pitagorici (circa 500 a.C.) ponevano a base di tutto il numero (con tutta la sua pluralità).
- Parmenide d'Elea (circa 450 a.C.) critica fortemente questa convinzione contrapponendogli l'unità e la permanenza dell'essere.
- Zenone d'Elea (circa 450 a.C.) discepolo di Parmenide formulò alcuni paradossi che volevano mostrare la contraddittorietà nascosta nei concetti di molteplicità e divisibilità.
- Due paradossi tra i più famosi sono quello della "dicotomia" e quello di "Achille e la tartaruga" (equivalenti tra loro). Qui ne consideriamo una versione equivalente ma più semplice da visualizzare.

Il paradosso di Zenone

- Devo andare dal punto A al punto B che distano un 1 km.
- Prima di tutto devo percorrere metà della distanza tra A e B ($1/2$ km),
- poi devo percorrere metà della distanza rimanente (metà della metà della distanza AB, cioè $1/4$ km),
- e poi devo percorrere metà della distanza rimanente (metà della metà della metà della distanza AB, cioè $1/8$ km),
- e così via ...

Il paradosso di Zenone

- Devo andare dal punto A al punto B che distano un 1 km.
- Prima di tutto devo percorrere metà della distanza tra A e B ($1/2$ km),
- poi devo percorrere metà della distanza rimanente (metà della metà della distanza AB, cioè $1/4$ km),
- e poi devo percorrere metà della distanza rimanente (metà della metà della metà della distanza AB, cioè $1/8$ km),
- e così via ...

Il paradosso di Zenone

- Devo andare dal punto A al punto B che distano un 1 km.
- Prima di tutto devo percorrere metà della distanza tra A e B ($1/2$ km),
- poi devo percorrere metà della distanza rimanente (metà della metà della distanza AB, cioè $1/4$ km),
- e poi devo percorrere metà della distanza rimanente (metà della metà della metà della distanza AB, cioè $1/8$ km),
- e così via ...

Il paradosso di Zenone

- Devo andare dal punto A al punto B che distano un 1 km.
- Prima di tutto devo percorrere metà della distanza tra A e B ($1/2$ km),
- poi devo percorrere metà della distanza rimanente (metà della metà della distanza AB, cioè $1/4$ km),
- e poi devo percorrere metà della distanza rimanente (metà della metà della metà della distanza AB, cioè $1/8$ km),
- e così via ...

Il paradosso di Zenone

- Devo andare dal punto A al punto B che distano un 1 km.
- Prima di tutto devo percorrere metà della distanza tra A e B ($1/2$ km),
- poi devo percorrere metà della distanza rimanente (metà della metà della distanza AB, cioè $1/4$ km),
- e poi devo percorrere metà della distanza rimanente (metà della metà della metà della distanza AB, cioè $1/8$ km),
- e così via ...

La conclusione di Zenone

- Zenone concludeva quindi che il movimento era impossibile.
- Infatti per arrivare in B avrei dovuto percorrere un numero infinito di tali suddivisioni in un periodo di tempo finito,
- ma è impossibile esaurire una collezione INFINITA di elementi.

La conclusione di Zenone

- Zenone concludeva quindi che il movimento era impossibile.
- Infatti per arrivare in B avrei dovuto percorrere un numero infinito di tali suddivisioni in un periodo di tempo finito,
- ma è impossibile esaurire una collezione INFINITA di elementi.

La conclusione di Zenone

- Zenone concludeva quindi che il movimento era impossibile.
- Infatti per arrivare in B avrei dovuto percorrere un numero infinito di tali suddivisioni in un periodo di tempo finito,
- ma è impossibile esaurire una collezione INFINITA di elementi.

Sciogliere il paradosso di Zenone

Per cercare di rispondere al paradosso di Zenone, dobbiamo quindi considerare questi problemi.

Problema

Ha senso sommare infiniti termini?

Problema

Come sommare infiniti termini?

Nel nostro caso siamo interessati a

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=?$$

Sciogliere il paradosso di Zenone

Per cercare di rispondere al paradosso di Zenone, dobbiamo quindi considerare questi problemi.

Problema

Ha senso sommare infiniti termini?

Problema

Come sommare infiniti termini?

Nel nostro caso siamo interessati a

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=?$$

Sciogliere il paradosso di Zenone

Per cercare di rispondere al paradosso di Zenone, dobbiamo quindi considerare questi problemi.

Problema

Ha senso sommare infiniti termini?

Problema

Come sommare infiniti termini?

Nel nostro caso siamo interessati a

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = ?$$

Sciogliere il paradosso di Zenone

Per cercare di rispondere al paradosso di Zenone, dobbiamo quindi considerare questi problemi.

Problema

Ha senso sommare infiniti termini?

Problema

Come sommare infiniti termini?

Nel nostro caso siamo interessati a

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = ?$$

I protagonisti

Per dare una risposta a questi quesiti utilizzeremo strumenti e risultati dovuti a molti matematici:

- Archimede 287-212 a.C. (convergenza serie geometrica)
- Nicola Oresme 1323?-1382 (divergenza serie armonica)
- John Wallis (1617-1703) (Arithmetica Infinitorum)
- Isaac Newton (1642-1727) - Gottfried W. von Leibniz (1646-1716)
- i Bernoulli (fine '600 - '700)
- ....

Un'osservazione preliminare

- Sommare infinite volte una quantità fissata dà una quantità infinitamente grande:

$$1+1+1+1+\ldots\ldots=\infty.$$

- Per avere la speranza che una somma di infinite quantità dia un numero finito dovremo avere che le quantità da sommare diventino sempre più piccole (e sempre più vicine a 0).

Nel nostro caso (*serie geometrica*) è proprio così:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$$

Un'osservazione preliminare

- Sommare infinite volte una quantità fissata dà una quantità infinitamente grande:
$$1+1+1+1+\ldots\ldots=\infty.$$
- Per avere la speranza che una somma di infinite quantità dia un numero finito dovremo avere che le quantità da sommare diventino sempre più piccole (e sempre più vicine a 0).

Nel nostro caso (*serie geometrica*) è proprio così:
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$$

Un'osservazione preliminare

- Sommare infinite volte una quantità fissata dà una quantità infinitamente grande:
$$1+1+1+1+\ldots\ldots=\infty.$$
- Per avere la speranza che una somma di infinite quantità dia un numero finito dovremo avere che le quantità da sommare diventino sempre più piccole (e sempre più vicine a 0).

Nel nostro caso (*serie geometrica*) è proprio così:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$$

Attenzione!

Purtroppo assicurarsi che le quantità da sommare diventino sempre più vicino a zero non è sufficiente:

La serie armonica

Consideriamo

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

In questo caso si ha che

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \infty.$$

Attenzione!

Purtroppo assicurarsi che le quantità da sommare diventino sempre più vicino a zero non è sufficiente:

La serie armonica

Consideriamo

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$$

In questo caso si ha che

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\infty.$$

Attenzione!

Purtroppo assicurarsi che le quantità da sommare diventino sempre più vicino a zero non è sufficiente:

La serie armonica

Consideriamo
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

In questo caso si ha che
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \infty.$$

La serie armonica diverge

Per dimostrare quanto detto sopra basta osservare che

$$\frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{4} \quad + \quad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} \quad + \ldots$$

$$>$$

$$\frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{4} \quad + \quad \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} \quad + \ldots$$

$$=$$

$$\frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{2}+\ldots=\infty.$$

La serie geometrica

Torniamo a ragionare sul nostro problema:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots.$$

- Incominciamo a sommare i primi n termini:

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}$$

(è un numero ben preciso e finito).

- Adesso osserviamo che

$$S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\ldots-\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}.$$

La serie geometrica

Torniamo a ragionare sul nostro problema:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots.$$

- Incominciamo a sommare i primi n termini:

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}$$

(è un numero ben preciso e finito).

- Adesso osserviamo che

$$S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\ldots-\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}.$$

La serie geometrica

Torniamo a ragionare sul nostro problema:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots.$$

- Incominciamo a sommare i primi n termini:

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}$$

(è un numero ben preciso e finito).

- Adesso osserviamo che

$$S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\ldots-\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}.$$

La somma della serie geometrica

- Dunque
$$S_n - \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}},$$
- e quindi
$$S_n = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right);$$
- ma allora, se n diventa molto grande (limite per $n \to +\infty$), si ha che
  - S_n diventa la somma (di infiniti termini) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$
  - $\frac{1}{2^{n+1}}$ diventa 0,
  - $2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ diventa 1.

La somma della serie geometrica

- Dunque
$$S_n - \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}},$$
- e quindi
$$S_n = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right);$$
- ma allora, se n diventa molto grande (limite per $n \to +\infty$), si ha che
  - S_n diventa la somma (di infiniti termini) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$
  - $\frac{1}{2^{n+1}}$ diventa 0,
  - $2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ diventa 1.

La somma della serie geometrica

- Dunque
$$S_n - \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}},$$
- e quindi
$$S_n = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right);$$
- ma allora, se n diventa molto grande (limite per $n \to +\infty$), si ha che
  - S_n diventa la somma (di infiniti termini) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$
  - $\frac{1}{2^{n+1}}$ diventa 0,
  - $2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ diventa 1.

La somma della serie geometrica

- Dunque
$$S_n - \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}},$$
- e quindi
$$S_n = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right);$$
- ma allora, se n diventa molto grande (limite per $n \to +\infty$), si ha che
  - S_n diventa la somma (di infiniti termini) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$
  - $\frac{1}{2^{n+1}}$ diventa 0,
  - $2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ diventa 1.

La somma della serie geometrica

- Dunque

$$S_n - \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}},$$

- e quindi

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right);$$

- ma allora, se n diventa molto grande (limite per $n \to +\infty$), si ha che
  - S_n diventa la somma (di infiniti termini) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$
  - $\frac{1}{2^{n+1}}$ diventa 0,
  - $2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ diventa 1.

Il paradosso di Zenone non è più un paradosso

- Concludiamo quindi che

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1$$

- Dunque per andare da un posto ad un altro che dista un kilometro, ovviamente percorrerò prima la metà della distanza, poi la metà della distanza rimanente, poi la metà della metà...e così via all'infinito.
- Ma la somma di queste distanze è finita (anzi è proprio 1).

Il paradosso di Zenone non è più un paradosso

- Concludiamo quindi che

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=1$$

- Dunque per andare da un posto ad un altro che dista un kilometro, ovviamente percorrerò prima la metà della distanza, poi la metà della distanza rimanente, poi la metà della metà...e così via all'infinito.
- Ma la somma di queste distanze è finita (anzi è proprio 1).

Il paradosso di Zenone non è più un paradosso

- Concludiamo quindi che

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=1$$

- Dunque per andare da un posto ad un altro che dista un kilometro, ovviamente percorrerò prima la metà della distanza, poi la metà della distanza rimanente, poi la metà della metà...e così via all'infinito.
- Ma la somma di queste distanze è finita (anzi è proprio 1).

Un'applicazione: le rendite perpetue

Problema calcolare il valore di una rendita (posticipata) perpetua di un euro all'anno supponendo che il tasso d'interesse sia pari al 3%.

- Il valore attuale di questa rendita perpetua è data da:

$$\frac{1}{(1+0,03)}+\frac{1}{(1+0,03)^2}+\frac{1}{(1+0,03)^3}+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(1+0,03)^n}.$$

- In generale se il tasso è pari ad i, il valore attuale di una rendita perpetua annua posticipata è data da

$$\frac{1}{(1+i)}+\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1+i)^3}+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(1+i)^n}=\frac{1}{i}.$$

Un'applicazione: le rendite perpetue

Problema calcolare il valore di una rendita (posticipata) perpetua di un euro all'anno supponendo che il tasso d'interesse sia pari al 3%.

- Il valore attuale di questa rendita perpetua è data da:

$$\frac{1}{(1+0,03)}+\frac{1}{(1+0,03)^2}+\frac{1}{(1+0,03)^3}+\dots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(1+0,03)^n}.$$

- In generale se il tasso è pari ad i, il valore attuale di una rendita perpetua annua posticipata è data da

$$\frac{1}{(1+i)}+\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1+i)^3}+\dots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(1+i)^n}=\frac{1}{i}.$$

Un'applicazione: le rendite perpetue

Problema calcolare il valore di una rendita (posticipata) perpetua di un euro all'anno supponendo che il tasso d'interesse sia pari al 3%.

- Il valore attuale di questa rendita perpetua è data da:

$$\frac{1}{(1+0,03)}+\frac{1}{(1+0,03)^2}+\frac{1}{(1+0,03)^3}+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(1+0,03)^n}.$$

- In generale se il tasso è pari ad i, il valore attuale di una rendita perpetua annua posticipata è data da

$$\frac{1}{(1+i)}+\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1+i)^3}+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(1+i)^n}=\frac{1}{i}.$$

Parte 2

Rriflettere sull'infinito

La riflessione sui fondamenti

- Fino alla fine del '800 l'infinito viene "usato" in matematica senza dare adito ad una vera e propria profonda riflessione sulle sue proprietà (naturalmente con le dovute eccezioni, ad esempio Galileo Galilei) ed ai problemi che queste aprono.
- In questo periodo, però, assume grande rilevanza il problema di dare un solido fondamento alla matematica.
- In questo ambito (a cavallo tra logica e matematica) il concetto di infinito tornerà prepotentemente alla ribalta.

La riflessione sui fondamenti

- Fino alla fine del '800 l'infinito viene "usato" in matematica senza dare adito ad una vera e propria profonda riflessione sulle sue proprietà (naturalmente con le dovute eccezioni, ad esempio Galileo Galilei) ed ai problemi che queste aprono.
- In questo periodo, però, assume grande rilevanza il problema di dare un solido fondamento alla matematica.
- In questo ambito (a cavallo tra logica e matematica) il concetto di infinito tornerà prepotentemente alla ribalta.

La riflessione sui fondamenti

- Fino alla fine del '800 l'infinito viene "usato" in matematica senza dare adito ad una vera e propria profonda riflessione sulle sue proprietà (naturalmente con le dovute eccezioni, ad esempio Galileo Galilei) ed ai problemi che queste aprono.
- In questo periodo, però, assume grande rilevanza il problema di dare un solido fondamento alla matematica.
- In questo ambito (a cavallo tra logica e matematica) il concetto di infinito tornerà prepotentemente alla ribalta.

David Hilbert (1862 - 1943)

Se una notte (d'inverno) un viaggiatore...

- Siamo nel 1900. L'illustre dottor David Hilbert è in viaggio per andare a Parigi al convegno mondiale dei matematici.
- E' sera.
- Arriva all'Albergo dalle Infinite Stanze...
- ...che sfortunatamente è al completo.

Se una notte (d'inverno) un viaggiatore...

- Siamo nel 1900. L'illustre dottor David Hilbert è in viaggio per andare a Parigi al convegno mondiale dei matematici.
- E' sera.
- Arriva all'Albergo dalle Infinite Stanze...
- ...che sfortunatamente è al completo.

Se una notte (d'inverno) un viaggiatore...

- Siamo nel 1900. L'illustre dottor David Hilbert è in viaggio per andare a Parigi al convegno mondiale dei matematici.
- E' sera.
- Arriva all'Albergo dalle Infinite Stanze...
- ...che sfortunatamente è al completo.

Se una notte (d'inverno) un viaggiatore...

- Siamo nel 1900. L'illustre dottor David Hilbert è in viaggio per andare a Parigi al convegno mondiale dei matematici.
- E' sera.
- Arriva all'Albergo dalle Infinite Stanze...
- ...che sfortunatamente è al completo.

Con la matematica ci si arrangia

Portiere dell'albergo: Ho le infinite stanze tutte occupate...Mi spiace proprio...non so dove sistemarla

Hilbert: Non vedo quale sia il problema...

Portiere:.. ma se le dico che tutte le stanze sono occupate.

Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 3 e cosi via...

Portiere: Non capisco ...?

Hilbert: Guardi se segue le mie indicazioni, e cioè se chiede ad ogni cliente di spostarsi dalla sua stanza a quella che porta il numero più grande di uno, lei avrà la stanza 1 libera e contemporaneamente tutti i clienti avranno comunque una stanza.

Portiere:....ci sono...la prego, si accomodi !

Con la matematica ci si arrangia

Portiere dell'albergo: Ho le infinite stanze tutte occupate...Mi spiace proprio...non so dove sistemarla
Hilbert: Non vedo quale sia il problema...
Portiere:.. ma se le dico che tutte le stanze sono occupate.
Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 3 e cosi via...
Portiere: Non capisco ...?
Hilbert: Guardi se segue le mie indicazioni, e cioè se chiede ad ogni cliente di spostarsi dalla sua stanza a quella che porta il numero più grande di uno, lei avrà la stanza 1 libera e contemporaneamente tutti i clienti avranno comunque una stanza.
Portiere:....ci sono...la prego, si accomodi !

Con la matematica ci si arrangia

Portiere dell'albergo: Ho le infinite stanze tutte occupate...Mi spiace proprio...non so dove sistemarla
Hilbert: Non vedo quale sia il problema...
Portiere:.. ma se le dico che tutte le stanze sono occupate.
Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 3 e cosi via...
Portiere: Non capisco ...?
Hilbert: Guardi se segue le mie indicazioni, e cioè se chiede ad ogni cliente di spostarsi dalla sua stanza a quella che porta il numero più grande di uno, lei avrà la stanza 1 libera e contemporaneamente tutti i clienti avranno comunque una stanza.
Portiere:....ci sono...la prego, si accomodi !

Con la matematica ci si arrangia

Portiere dell'albergo: Ho le infinite stanze tutte occupate...Mi spiace proprio...non so dove sistemarla
Hilbert: Non vedo quale sia il problema...
Portiere:.. ma se le dico che tutte le stanze sono occupate.
Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 3 e cosi via...
Portiere: Non capisco ...?
Hilbert: Guardi se segue le mie indicazioni, e cioè se chiede ad ogni cliente di spostarsi dalla sua stanza a quella che porta il numero più grande di uno, lei avrà la stanza 1 libera e contemporaneamente tutti i clienti avranno comunque una stanza.
Portiere:....ci sono...la prego, si accomodi !

Con la matematica ci si arrangia

Portiere dell'albergo: Ho le infinite stanze tutte occupate...Mi spiace proprio...non so dove sistemarla
Hilbert: Non vedo quale sia il problema...
Portiere:.. ma se le dico che tutte le stanze sono occupate.
Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 3 e cosi via...
Portiere: Non capisco ...?
Hilbert: Guardi se segue le mie indicazioni, e cioè se chiede ad ogni cliente di spostarsi dalla sua stanza a quella che porta il numero più grande di uno, lei avrà la stanza 1 libera e contemporaneamente tutti i clienti avranno comunque una stanza.
Portiere:....ci sono...la prego, si accomodi !

Con la matematica ci si arrangia

Portiere dell'albergo: Ho le infinite stanze tutte occupate...Mi spiace proprio...non so dove sistemarla
Hilbert: Non vedo quale sia il problema...
Portiere:.. ma se le dico che tutte le stanze sono occupate.
Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 3 e cosi via...
Portiere: Non capisco ...?
Hilbert: Guardi se segue le mie indicazioni, e cioè se chiede ad ogni cliente di spostarsi dalla sua stanza a quella che porta il numero più grande di uno, lei avrà la stanza 1 libera e contemporaneamente tutti i clienti avranno comunque una stanza.
Portiere:....ci sono...la prego, si accomodi !

Con la matematica ci si arrangia

Portiere dell'albergo: Ho le infinite stanze tutte occupate...Mi spiace proprio...non so dove sistemarla
Hilbert: Non vedo quale sia il problema...
Portiere:.. ma se le dico che tutte le stanze sono occupate.
Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 3 e cosi via...
Portiere: Non capisco ...?
Hilbert: Guardi se segue le mie indicazioni, e cioè se chiede ad ogni cliente di spostarsi dalla sua stanza a quella che porta il numero più grande di uno, lei avrà la stanza 1 libera e contemporaneamente tutti i clienti avranno comunque una stanza.
Portiere:....ci sono...la prego, si accomodi !

In formule

- Quanto detto si potrebbe riassumere con la formula

$$\infty + 1 = \infty.$$

- Naturamente si ha anche

$$\infty + 2 = \infty; \quad \infty + 585 = \infty \quad \infty + 100000000 = \infty.$$

- Insomma, se all'infinito si aggiunge un numero finito si ottiene sempre l'infinito.

In formule

- Quanto detto si potrebbe riassumere con la formula

$$\infty + 1 = \infty.$$

- Naturamente si ha anche

$$\infty + 2 = \infty; \quad \infty + 585 = \infty \quad \infty + 100000000 = \infty.$$

- Insomma, se all'infinito si aggiunge un numero finito si ottiene sempre l'infinito.

In formule

- Quanto detto si potrebbe riassumere con la formula

$$\infty + 1 = \infty.$$

- Naturamente si ha anche

$$\infty + 2 = \infty; \quad \infty + 585 = \infty \quad \infty + 100000000 = \infty.$$

- Insomma, se all'infinito si aggiunge un numero finito si ottiene sempre l'infinito.

Un numero infinito di clienti

Alcuni giorni dopo:

Portiere dell'albergo: Mi aiuti ...E' in arrivo un treno con un numero infinito di suoi colleghi per il convegno...adesso non so proprio come sistemarli...

Hilbert: Non vedo quale sia il problema...

Portiere:.. ma come,... con il suo arrivo l'albergo è pieno.

Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 4, a quello nella stanza 3 nella stanza 6 e così via...

Portiere: E a questo punto ho le stanze con numeri dispari tutte libere...e sono in numero infinite...sistemo così tutti i nuovi ospiti...Vede che ho imparato presto.

Hilbert: Complimenti...anche se qualche imprevisto potrebbe sempre accadere.

Un numero infinito di clienti

Alcuni giorni dopo:

Portiere dell'albergo: Mi aiuti ...E' in arrivo un treno con un numero infinito di suoi colleghi per il convegno...adesso non so proprio come sistemarli...

Hilbert: Non vedo quale sia il problema...

Portiere:.. ma come,... con il suo arrivo l'albergo è pieno.

Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 4, a quello nella stanza 3 nella stanza 6 e così via...

Portiere: E a questo punto ho le stanze con numeri dispari tutte libere...e sono in numero infinite...sistemo così tutti i nuovi ospiti...Vede che ho imparato presto.

Hilbert: Complimenti...anche se qualche imprevisto potrebbe sempre accadere.

Un numero infinito di clienti

Alcuni giorni dopo:
Portiere dell'albergo: Mi aiuti ...E' in arrivo un treno con un numero infinito di suoi colleghi per il convegno...adesso non so proprio come sistemarli...
Hilbert: Non vedo quale sia il problema...
Portiere:.. ma come,... con il suo arrivo l'albergo è pieno.
Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 4, a quello nella stanza 3 nella stanza 6 e così via...
Portiere: E a questo punto ho le stanze con numeri dispari tutte libere...e sono in numero infinite...sistemo così tutti i nuovi ospiti...Vede che ho imparato presto.
Hilbert: Complimenti...anche se qualche imprevisto potrebbe sempre accadere.

Un numero infinito di clienti

Alcuni giorni dopo:
Portiere dell'albergo: Mi aiuti ...E' in arrivo un treno con un numero infinito di suoi colleghi per il convegno...adesso non so proprio come sistemarli...
Hilbert: Non vedo quale sia il problema...
Portiere:.. ma come,... con il suo arrivo l'albergo è pieno.
Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 4, a quello nella stanza 3 nella stanza 6 e così via...
Portiere: E a questo punto ho le stanze con numeri dispari tutte libere...e sono in numero infinite...sistemo così tutti i nuovi ospiti...Vede che ho imparato presto.
Hilbert: Complimenti...anche se qualche imprevisto potrebbe sempre accadere.

Un numero infinito di clienti

Alcuni giorni dopo:
Portiere dell'albergo: Mi aiuti ...E' in arrivo un treno con un numero infinito di suoi colleghi per il convegno...adesso non so proprio come sistemarli...
Hilbert: Non vedo quale sia il problema...
Portiere:.. ma come,... con il suo arrivo l'albergo è pieno.
Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 4, a quello nella stanza 3 nella stanza 6 e così via...
Portiere: E a questo punto ho le stanze con numeri dispari tutte libere...e sono in numero infinite...sistemo così tutti i nuovi ospiti...Vede che ho imparato presto.
Hilbert: Complimenti...anche se qualche imprevisto potrebbe sempre accadere.

Un numero infinito di clienti

Alcuni giorni dopo:
Portiere dell'albergo: Mi aiuti ...E' in arrivo un treno con un numero infinito di suoi colleghi per il convegno...adesso non so proprio come sistemarli...
Hilbert: Non vedo quale sia il problema...
Portiere:.. ma come,... con il suo arrivo l'albergo è pieno.
Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 4, a quello nella stanza 3 nella stanza 6 e così via...
Portiere: E a questo punto ho le stanze con numeri dispari tutte libere...e sono in numero infinite...sistemo così tutti i nuovi ospiti...Vede che ho imparato presto.
Hilbert: Complimenti...anche se qualche imprevisto potrebbe sempre accadere.

Un numero infinito di clienti

Alcuni giorni dopo:
Portiere dell'albergo: Mi aiuti ...E' in arrivo un treno con un numero infinito di suoi colleghi per il convegno...adesso non so proprio come sistemarli...
Hilbert: Non vedo quale sia il problema...
Portiere:.. ma come,... con il suo arrivo l'albergo è pieno.
Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 4, a quello nella stanza 3 nella stanza 6 e così via...
Portiere: E a questo punto ho le stanze con numeri dispari tutte libere...e sono in numero infinite...sistemo così tutti i nuovi ospiti...Vede che ho imparato presto.
Hilbert: Complimenti...anche se qualche imprevisto potrebbe sempre accadere.

La cardinalità di un insieme e il contare

- Quando due insiemi hanno lo stesso numero di elementi (o più pomposamente la stessa cardinalità)?
- O in altri termini: perchè 3 mele sono, dal punto di vista della "numerosità", lo stesso che 3 pere?
- Perchè ad una pera posso associare una e una sola mela in modo ben definito:

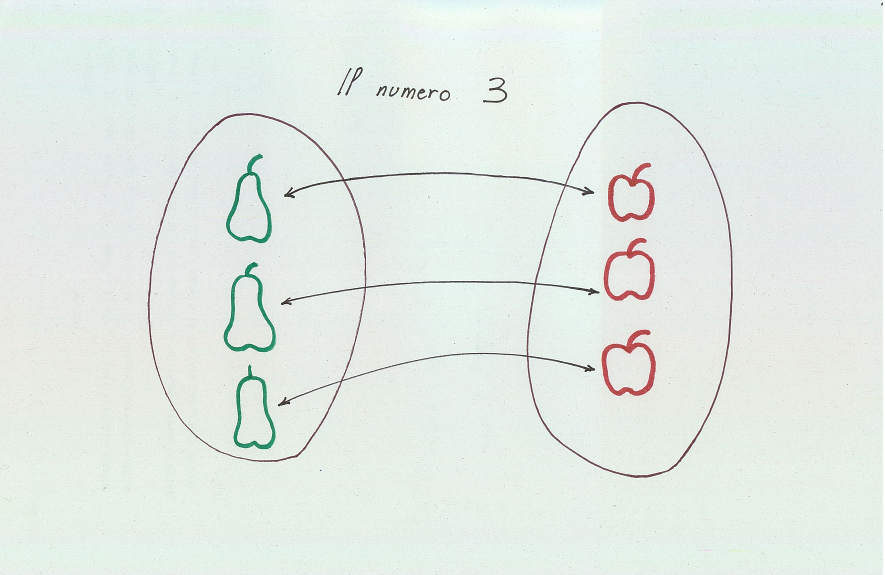
La cardinalità di un insieme e il contare

- Quando due insiemi hanno lo stesso numero di elementi (o più pomposamente la stessa cardinalità)?
- O in altri termini: perchè 3 mele sono, dal punto di vista della "numerosità", lo stesso che 3 pere?
- Perchè ad una pera posso associare una e una sola mela in modo ben definito:

La cardinalità di un insieme e il contare

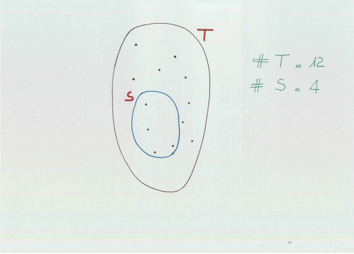
- Quando due insiemi hanno lo stesso numero di elementi (o più pomposamente la stessa cardinalità)?
- O in altri termini: perchè 3 mele sono, dal punto di vista della "numerosità", lo stesso che 3 pere?
- Perchè ad una pera posso associare una e una sola mela in modo ben definito:

Il numero 3



Insiemi e sottoinsiemi

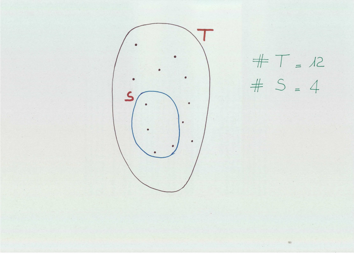
- Se prendo un sottoinsieme (proprio) S di un insieme T di oggetti qualunque sembra naturale dire che S ha un numero minore di elementi rispetto a T.



- Questa affermazione è sempre vera se il numero degli elementi di T è finito. Non vale invece se T ha un numero infinito di elementi.

Insiemi e sottoinsiemi

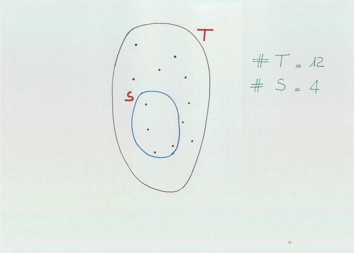
- Se prendo un sottoinsieme (proprio) S di un insieme T di oggetti qualunque sembra naturale dire che S ha un numero minore di elementi rispetto a T.



- Questa affermazione è sempre vera se il numero degli elementi di T è finito. Non vale invece se T ha un numero infinito di elementi.

Insiemi e sottoinsiemi

- Se prendo un sottoinsieme (proprio) S di un insieme T di oggetti qualunque sembra naturale dire che S ha un numero minore di elementi rispetto a T.



- Questa affermazione è sempre vera se il numero degli elementi di T è finito. Non vale invece se T ha un numero infinito di elementi.

Pari e dispari (si torna a Galileo)

- Con $\mathbb{N}$ si indica l'insieme di tutti i numeri interi non negativi (numeri naturali):

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4...\}.$$

- Naturalmente i pari sono un sottoinsieme di $\mathbb{N}$....ma quanti sono rispetto agli elementi di $\mathbb{N}$?

$\mathbb{N}$		pari
0	$\longleftrightarrow$	0
1	$\longleftrightarrow$	2
2	$\longleftrightarrow$	4
3	$\longleftrightarrow$	6
...	$\longleftrightarrow$	...
n	$\longleftrightarrow$	$2n$
...	$\longleftrightarrow$	...

Pari e dispari (si torna a Galileo)

- Con $\mathbb{N}$ si indica l'insieme di tutti i numeri interi non negativi (numeri naturali):

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}.$$

- Naturalmente i pari sono un sottoinsieme di $\mathbb{N}$....ma quanti sono rispetto agli elementi di $\mathbb{N}$?

$\mathbb{N}$		pari
0	$\longleftrightarrow$	0
1	$\longleftrightarrow$	2
2	$\longleftrightarrow$	4
3	$\longleftrightarrow$	6
...	$\longleftrightarrow$	...
n	$\longleftrightarrow$	$2n$
...	$\longleftrightarrow$	...

Pari e dispari (si torna a Galileo)

- Con $\mathbb{N}$ si indica l'insieme di tutti i numeri interi non negativi (numeri naturali):

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4...\}.$$

- Naturalmente i pari sono un sottoinsieme di $\mathbb{N}$....ma quanti sono rispetto agli elementi di $\mathbb{N}$?

$\mathbb{N}$		pari
0	$\longleftrightarrow$	0
1	$\longleftrightarrow$	2
2	$\longleftrightarrow$	4
3	$\longleftrightarrow$	6
...	$\longleftrightarrow$	...
n	$\longleftrightarrow$	$2n$
...	$\longleftrightarrow$	...

Insiemi con infiniti elementi

- La risposta alla nostra domanda è dunque: ci sono tanti numeri pari quanti tutti i numeri naturali.
- Abbiamo dunque un insieme contenuto dentro $\mathbb{N}$ (diverso da $\mathbb{N}$ stesso) ma che ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$.
- Situazioni di questo tipo possono accadere se e solo se si ha a che fare con insiemi che posseggono infiniti elementi.
- Gli insiemi che hanno la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$ si dicono avere la potenza del numerabile.
- Infatti i loro elementi possono essere numerati con i numeri naturali (e quindi ben ordinati...).

Insiemi con infiniti elementi

- La risposta alla nostra domanda è dunque: ci sono tanti numeri pari quanti tutti i numeri naturali.
- Abbiamo dunque un insieme contenuto dentro $\mathbb{N}$ (diverso da $\mathbb{N}$ stesso) ma che ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$.
- Situazioni di questo tipo possono accadere se e solo se si ha a che fare con insiemi che posseggono infiniti elementi.
- Gli insiemi che hanno la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$ si dicono avere la potenza del numerabile.
- Infatti i loro elementi possono essere numerati con i numeri naturali (e quindi ben ordinati...).

Insiemi con infiniti elementi

- La risposta alla nostra domanda è dunque: ci sono tanti numeri pari quanti tutti i numeri naturali.
- Abbiamo dunque un insieme contenuto dentro $\mathbb{N}$ (diverso da $\mathbb{N}$ stesso) ma che ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$.
- Situazioni di questo tipo possono accadere se e solo se si ha a che fare con insiemi che posseggono infiniti elementi.
- Gli insiemi che hanno la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$ si dicono avere la potenza del numerabile.
- Infatti i loro elementi possono essere numerati con i numeri naturali (e quindi ben ordinati...).

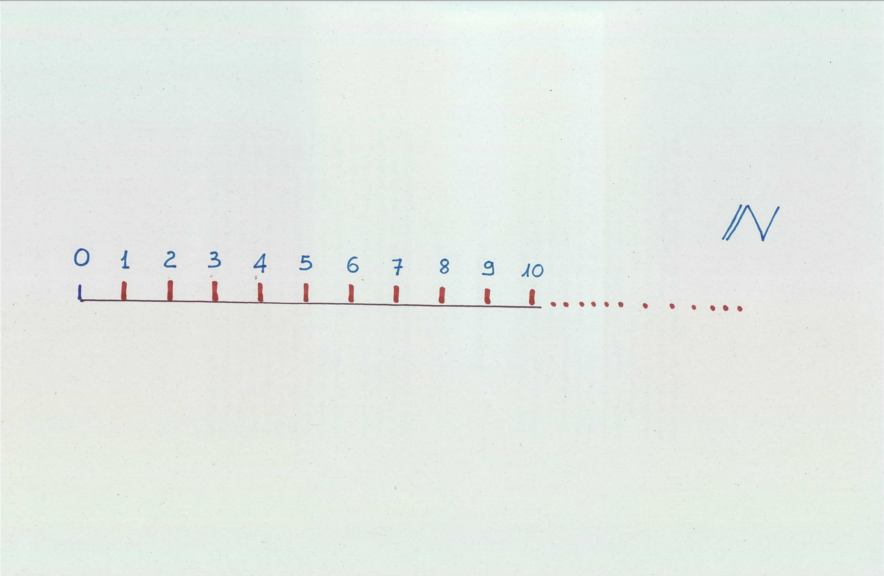
Insiemi con infiniti elementi

- La risposta alla nostra domanda è dunque: ci sono tanti numeri pari quanti tutti i numeri naturali.
- Abbiamo dunque un insieme contenuto dentro $\mathbb{N}$ (diverso da $\mathbb{N}$ stesso) ma che ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$.
- Situazioni di questo tipo possono accadere se e solo se si ha a che fare con insiemi che posseggono infiniti elementi.
- Gli insiemi che hanno la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$ si dicono avere la potenza del numerabile.
- Infatti i loro elementi possono essere numerati con i numeri naturali (e quindi ben ordinati...).

Insiemi con infiniti elementi

- La risposta alla nostra domanda è dunque: ci sono tanti numeri pari quanti tutti i numeri naturali.
- Abbiamo dunque un insieme contenuto dentro $\mathbb{N}$ (diverso da $\mathbb{N}$ stesso) ma che ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$.
- Situazioni di questo tipo possono accadere se e solo se si ha a che fare con insiemi che posseggono infiniti elementi.
- Gli insiemi che hanno la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$ si dicono avere la potenza del numerabile.
- Infatti i loro elementi possono essere numerati con i numeri naturali (e quindi ben ordinati...).

I numeri naturali



Georg Cantor (1845 - 1918)

"Nessuno ci scaccerà dal Paradiso che Cantor ci ha procurato" *D. Hilbert*

I numeri razionali

- Oltre ai numeri naturali noi conosciamo certamente altri numeri:
- Le frazioni: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}.....$
- L'insieme di tutte le possibili frazioni si indica con $\mathbb{Q}$ e i suoi elementi vengono chiamati numeri razionali

I numeri razionali

- Oltre ai numeri naturali noi conosciamo certamente altri numeri:
- Le frazioni: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}.....$
- L'insieme di tutte le possibili frazioni si indica con $\mathbb{Q}$ e i suoi elementi vengono chiamati numeri razionali

I numeri razionali

- Oltre ai numeri naturali noi conosciamo certamente altri numeri:
- Le frazioni: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}$.....
- L'insieme di tutte le possibili frazioni si indica con $\mathbb{Q}$ e i suoi elementi vengono chiamati numeri razionali

I numeri decimali

- I numeri razionali hanno un'altra faccia:
- ogni frazione si può rappresentare con un "numero con la virgola": ad esempio

$$\frac{1}{2} = 0,5 \quad \frac{4}{3} = 1,33333.....$$

- questo numero però ha delle caratteristiche precise: o
  - ha un numero finito di cifre dopo la virgola, oppure
  - ha un numero infinito di cifre dopo la virgola ma con un blocco di cifre finito che si ripete infinite volte (numero periodico)

I numeri decimali

- I numeri razionali hanno un'altra faccia:
- ogni frazione si può rappresentare con un "numero con la virgola": ad esempio

$$\frac{1}{2} = 0,5 \quad \frac{4}{3} = 1,33333.....$$

- questo numero però ha delle caratteristiche precise: o
  - ha un numero finito di cifre dopo la virgola, oppure
  - ha un numero infinito di cifre dopo la virgola ma con un blocco di cifre finito che si ripete infinite volte (numero periodico)

I numeri decimali

- I numeri razionali hanno un'altra faccia:
- ogni frazione si può rappresentare con un "numero con la virgola": ad esempio

$$\frac{1}{2} = 0,5 \quad \frac{4}{3} = 1,33333.....$$

- questo numero però ha delle caratteristiche precise: o
  - ha un numero finito di cifre dopo la virgola, oppure
  - ha un numero infinito di cifre dopo la virgola ma con un blocco di cifre finito che si ripete infinite volte (numero periodico)

I numeri decimali

- I numeri razionali hanno un'altra faccia:
- ogni frazione si può rappresentare con un "numero con la virgola": ad esempio

$$\frac{1}{2} = 0,5 \quad \frac{4}{3} = 1,33333.....$$

- questo numero però ha delle caratteristiche precise: o
  - ha un numero finito di cifre dopo la virgola, oppure
  - ha un numero infinito di cifre dopo la virgola ma con un blocco di cifre finito che si ripete infinite volte (numero periodico)

I numeri decimali

- I numeri razionali hanno un'altra faccia:
- ogni frazione si può rappresentare con un "numero con la virgola": ad esempio

$$\frac{1}{2} = 0,5 \quad \frac{4}{3} = 1,33333.....$$

- questo numero però ha delle caratteristiche precise: o
  - ha un numero finito di cifre dopo la virgola, oppure
  - ha un numero infinito di cifre dopo la virgola ma con un blocco di cifre finito che si ripete infinite volte (numero periodico)

I numeri irrazionali

- Fin dalla Grecia antica (Pitagorici - Ippaso di Metaponto) si sa però che esistono numeri che non si possono scrivere come rapporti fra numeri interi,
- sono i numeri irrazionali.

$\sqrt{2}$ Il primo esempio di numero irrazionale è $\sqrt{2} = 1,41\ldots$. Questo numero è la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1

I numeri irrazionali

- Fin dalla Grecia antica (Pitagorici - Ippaso di Metaponto) si sa però che esistono numeri che non si possono scrivere come rapporti fra numeri interi,
- sono i numeri irrazionali.

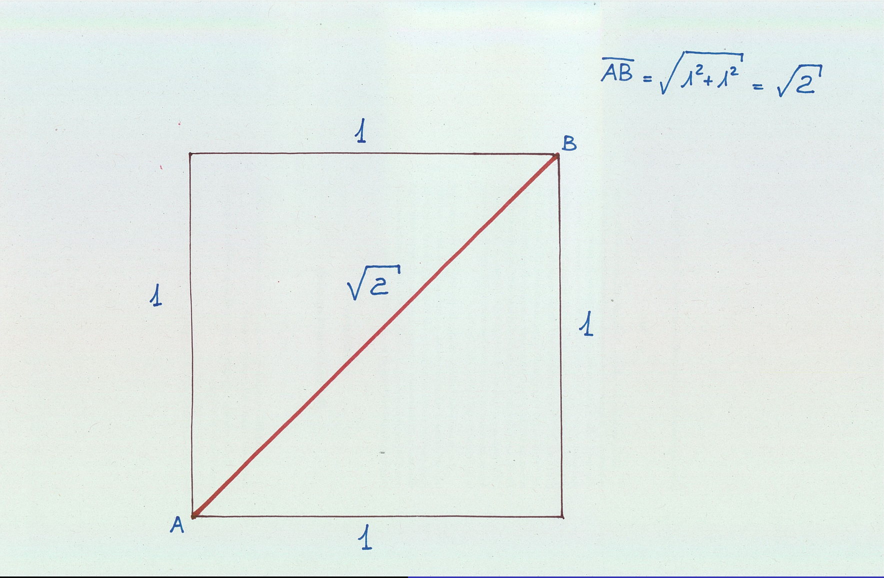
$\sqrt{2}$ Il primo esempio di numero irrazionale è $\sqrt{2} = 1,41\ldots$. Questo numero è la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1

I numeri irrazionali

- Fin dalla Grecia antica (Pitagorici - Ippaso di Metaponto) si sa però che esistono numeri che non si possono scrivere come rapporti fra numeri interi,
- sono i numeri irrazionali.

$\sqrt{2}$ Il primo esempio di numero irrazionale è $\sqrt{2} = 1,41\ldots$. Questo numero è la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1

La diagonale del quadrato



I numeri reali

- Se mettiamo insieme i numeri razionali con quelli irrazionali otteniamo l'insieme dei numeri reali (che si indica con $\mathbb{R}$)
- cioè di tutti i possibili "numeri con la virgola", indipendentemente dal comportamento delle cifre dopo la virgola
- I numeri reali si possono mettere in corrispondenza uno a uno con i punti della retta.

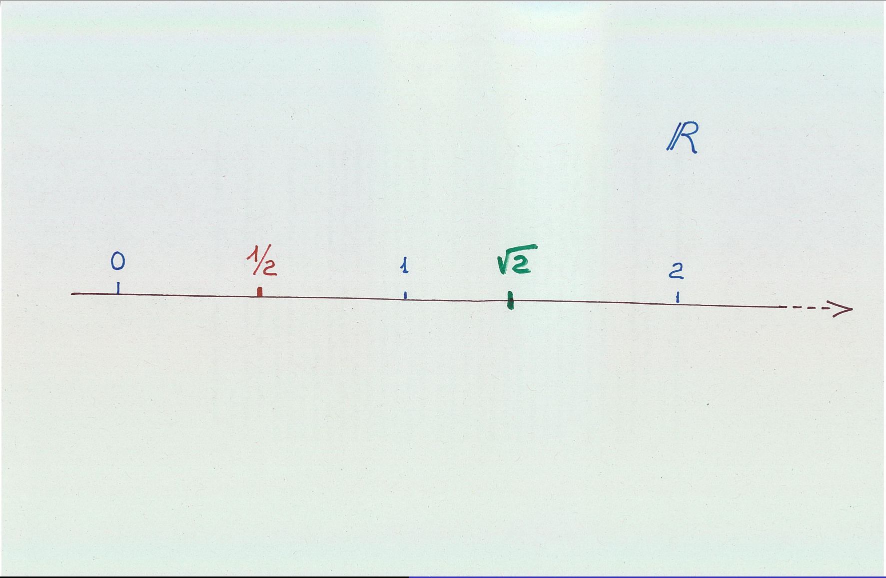
I numeri reali

- Se mettiamo insieme i numeri razionali con quelli irrazionali otteniamo l'insieme dei numeri reali (che si indica con $\mathbb{R}$)
- cioè di tutti i possibili "numeri con la virgola", indipendentemente dal comportamento delle cifre dopo la virgola
- I numeri reali si possono mettere in corrispondenza uno a uno con i punti della retta.

I numeri reali

- Se mettiamo insieme i numeri razionali con quelli irrazionali otteniamo l'insieme dei numeri reali (che si indica con $\mathbb{R}$)
- cioè di tutti i possibili "numeri con la virgola", indipendentemente dal comportamento delle cifre dopo la virgola
- I numeri reali si possono mettere in corrispondenza uno a uno con i punti della retta.

La retta reale



Cantor e l'infinito attuale

- Cantor si occupò dello studio della teoria degli insiemi
- in particolare, studiò gli insiemi costituiti da infiniti elementi

Esistono diversi infiniti ?Cantor si pose il problema del confronto (della cardinalità) di insiemi infiniti.

- La prima scoperta importante fu che l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali ha tanti elementi quanto l'insieme $\mathbb{Q}$,
- infatti le frazioni possono essere elencate in modo ben ordinato (prima, seconda, terza,...) secondo il famoso procedimento diagonale di Cantor

Cantor e l'infinito attuale

- Cantor si occupò dello studio della teoria degli insiemi
- in particolare, studiò gli insiemi costituiti da infiniti elementi

Esistono diversi infiniti ?Cantor si pose il problema del confronto (della cardinalità) di insiemi infiniti.

- La prima scoperta importante fu che l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali ha tanti elementi quanto l'insieme $\mathbb{Q}$,
- infatti le frazioni possono essere elencate in modo ben ordinato (prima, seconda, terza,...) secondo il famoso procedimento diagonale di Cantor

Cantor e l'infinito attuale

- Cantor si occupò dello studio della teoria degli insiemi
- in particolare, studiò gli insiemi costituiti da infiniti elementi

Esistono diversi infiniti ?Cantor si pose il problema del confronto (della cardinalità) di insiemi infiniti.

- La prima scoperta importante fu che l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali ha tanti elementi quanto l'insieme $\mathbb{Q}$,
- infatti le frazioni possono essere elencate in modo ben ordinato (prima, seconda, terza,...) secondo il famoso procedimento diagonale di Cantor

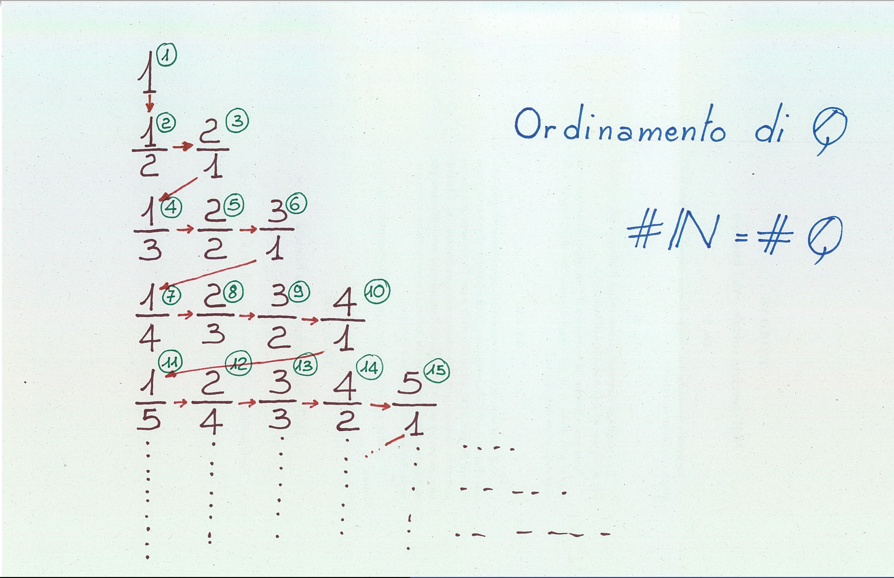
Cantor e l'infinito attuale

- Cantor si occupò dello studio della teoria degli insiemi
- in particolare, studiò gli insiemi costituiti da infiniti elementi

Esistono diversi infiniti ?Cantor si pose il problema del confronto (della cardinalità) di insiemi infiniti.

- La prima scoperta importante fu che l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali ha tanti elementi quanto l'insieme $\mathbb{Q}$,
- infatti le frazioni possono essere elencate in modo ben ordinato (prima, seconda, terza,...) secondo il famoso procedimento diagonale di Cantor

$\#\mathbb{Q} = \#\mathbb{N}$



Insiemi numerabili

- Cantor chiamò numerabili tutti gli insiemi (infiniti) che hanno tanti elementi quanti l'insieme dei numeri naturali.
- Indicò l'infinità numerabile con la prima lettera del alfabeto ebraico con indice 0
$$\aleph_0$$
e quindi
$$\#\mathbb{N} = \aleph_0.$$
- $\aleph_0$ è un numero transfinito.

Insiemi numerabili

- Cantor chiamò numerabili tutti gli insiemi (infiniti) che hanno tanti elementi quanti l'insieme dei numeri naturali.
- Indicò l'infinità numerabile con la prima lettera del alfabeto ebraico con indice 0
$$\aleph_0$$
e quindi
$$\#\mathbb{N} = \aleph_0.$$
- $\aleph_0$ è un numero transfinito.

Insiemi numerabili

- Cantor chiamò numerabili tutti gli insiemi (infiniti) che hanno tanti elementi quanti l'insieme dei numeri naturali.
- Indicò l'infinità numerabile con la prima lettera del alfabeto ebraico con indice 0
$$\aleph_0$$
e quindi
$$\#\mathbb{N} = \aleph_0.$$
- $\aleph_0$ è un numero transfinito.

E l'insieme $\mathbb{R}$?

- Cantor, con un metodo davvero ingegnoso, provò che l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ (l'insieme di tutti i numeri con la virgola) era un infinito davvero più grande del infinito numerabile $\aleph_0$ (l'infinito dei numeri interi).
- Cantor provò infatti che i numeri reali tra 1 e 2 non possono essere elencati (primo, secondo,...) senza lasciare fuori almeno un numero.

E l'insieme $\mathbb{R}$?

- Cantor, con un metodo davvero ingegnoso, provò che l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ (l'insieme di tutti i numeri con la virgola) era un infinito davvero più grande del infinito numerabile $\aleph_0$ (l'infinito dei numeri interi).
- Cantor provò infatti che i numeri reali tra 1 e 2 non possono essere elencati (primo, secondo,...) senza lasciare fuori almeno un numero.

numerabile $\neq$ continuo

- Supponiamo di poter in qualche modo elencare tutti i numeri (con la virgola) compresi tra 1 e 2.
- Creeremmo allora una lista che potrebbe avere questo aspetto:

1	1,	2	3	4	5	7	8	...
2	1,	5	7	5	6	0	7	...
3	1,	4	6	3	2	1	4	...
4	1,	8	4	6	2	1	6	...
5	1,	5	6	2	1	9	4	...
...	1,	...	...	...	...	...	...	...

- prendiamo il numero $1,27329...$ e aggiungiamo 1 ad ogni cifra dopo la virgola ($9+1=0$), si ottiene: $1,38430$. E' evidente che questo numero non può stare nel nostro elenco .... ma allora i numeri reali tra 1 e 2 sono "di più" dei numeri naturali.

numerabile $\neq$ continuo

- Supponiamo di poter in qualche modo elencare tutti i numeri (con la virgola) compresi tra 1 e 2.
- Creeremmo allora una lista che potrebbe avere questo aspetto:

1	1,	2	3	4	5	7	8	...
2	1,	5	7	5	6	0	7	...
3	1,	4	6	3	2	1	4	...
4	1,	8	4	6	2	1	6	...
5	1,	5	6	2	1	9	4	...
...	1,	...	...	...	...	...	...	...

- prendiamo il numero $1,27329\ldots$ e aggiungiamo 1 ad ogni cifra dopo la virgola ($9+1=0$), si ottiene: $1,38430$. E' evidente che questo numero non può stare nel nostro elenco .... ma allora i numeri reali tra 1 e 2 sono "di più" dei numeri naturali.

numerabile $\neq$ continuo

- Supponiamo di poter in qualche modo elencare tutti i numeri (con la virgola) compresi tra 1 e 2.
- Creeremmo allora una lista che potrebbe avere questo aspetto:

1	1,	2	3	4	5	7	8	...
2	1,	5	7	5	6	0	7	...
3	1,	4	6	3	2	1	4	...
4	1,	8	4	6	2	1	6	...
5	1,	5	6	2	1	9	4	...
...	1,	...	...	...	...	...	...	...

- prendiamo il numero $1,27329...$ e aggiungiamo 1 ad ogni cifra dopo la virgola $(9+1=0)$, si ottiene: $1,38430$. E' evidente che questo numero non può stare nel nostro elenco .... ma allora i numeri reali tra 1 e 2 sono "di più" dei numeri naturali.

La potenza del continuo

- Cantor chiamò gli insiemi che possono essere messi in corrispondenza uno a uno con l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ insiemi con la potenza del continuo.
- Cantor però andò oltre nel suo studio degli insiemi infiniti...
- trovò infatti un modo per costruire un insieme infinito più grande dato un qualunque insieme infinito...

La potenza del continuo

- Cantor chiamò gli insiemi che possono essere messi in corrispondenza uno a uno con l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ insiemi con la potenza del continuo.
- Cantor però andò oltre nel suo studio degli insiemi infiniti...
- trovò infatti un modo per costruire un insieme infinito più grande dato un qualunque insieme infinito...

La potenza del continuo

- Cantor chiamò gli insiemi che possono essere messi in corrispondenza uno a uno con l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ insiemi con la potenza del continuo.
- Cantor però andò oltre nel suo studio degli insiemi infiniti...
- trovò infatti un modo per costruire un insieme infinito più grande dato un qualunque insieme infinito...

L'insieme delle parti

- Consideriamo l'insieme $\{a, b, c\}$ con 3 elementi : a, b, c
- elenchiamo tutte le parti di $\{a, b, c\}$:

$$\{\}, \quad \{a\}, \quad \{b\}, \quad \{c\}, \quad \{a, b\}, \quad \{a, c\}, \quad \{b, c\}, \quad \{a, b, c\}.$$

- Consideriamo infine l'insieme di tutte le parti di $\{a, b, c\}$ (è un insieme di insiemi)

$$\mathscr{P}(\{a, b, c\}) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Questo insieme ha $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$ elementi quindi la sua cardinalità è data da 2 elevato alla cardinalità dell' insieme di partenza

$$\#\mathscr{P}(\{a, b, c\}) = 2^{\#\{a,b,c\}}$$

L'insieme delle parti

- Consideriamo l'insieme $\{a, b, c\}$ con 3 elementi : a, b, c
- elenchiamo tutte le parti di $\{a, b, c\}$:

$$\{\}\,, \quad \{a\}\,, \quad \{b\}\,, \quad \{c\}\,, \quad \{a,b\}\,, \quad \{a,c\}\,, \quad \{b,c\}\,, \quad \{a,b,c\}\,.$$

- Consideriamo infine l'insieme di tutte le parti di $\{a, b, c\}$ (è un insieme di insiemi)

$$\mathscr{P}(\{a,b,c\}) = \{\{\},\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}\,.$$

Questo insieme ha $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$ elementi quindi la sua cardinalità è data da 2 elevato alla cardinalità dell' insieme di partenza

$$\#\mathscr{P}(\{a,b,c\}) = 2^{\#\{a,b,c\}}$$

L'insieme delle parti

- Consideriamo l'insieme $\{a, b, c\}$ con 3 elementi : a, b, c
- elenchiamo tutte le parti di $\{a, b, c\}$:

$$\{\}, \quad \{a\}, \quad \{b\}, \quad \{c\}, \quad \{a, b\}, \quad \{a, c\}, \quad \{b, c\}, \quad \{a, b, c\}.$$

- Consideriamo infine l'insieme di tutte le parti di $\{a, b, c\}$ (è un insieme di insiemi)

$$\mathscr{P}(\{a, b, c\}) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Questo insieme ha $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$ elementi quindi la sua cardinalità è data da 2 elevato alla cardinalità dell' insieme di partenza

$$\#\mathscr{P}(\{a, b, c\}) = 2^{\#\{a,b,c\}}$$

L'insieme delle parti

- Consideriamo l'insieme $\{a, b, c\}$ con 3 elementi : a, b, c
- elenchiamo tutte le parti di $\{a, b, c\}$:

$$\{\}, \quad \{a\}, \quad \{b\}, \quad \{c\}, \quad \{a, b\}, \quad \{a, c\}, \quad \{b, c\}, \quad \{a, b, c\}.$$

- Consideriamo infine l'insieme di tutte le parti di $\{a, b, c\}$ (è un insieme di insiemi)

$$\mathscr{P}(\{a, b, c\}) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Questo insieme ha $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$ elementi quindi la sua cardinalità è data da 2 elevato alla cardinalità dell' insieme di partenza

$$\#\mathscr{P}(\{a, b, c\}) = 2^{\#\{a, b, c\}}$$

Infiniti infiniti

- Prendiamo adesso l'insieme dei numeri interi ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$) che ha un numero di elementi pari ad un infinità numerabile ($\aleph_0$),
- adesso prendiamo l'insieme di tutte le sue parti;
- Cantor dimostrò che questo ha un numero di elementi infinito sì, ma più grande di $\aleph_0$,
- chiamò questo numero $\aleph_1$ (secondo numero transfinito)
- Il trucco è chiaro...Cantor potè dunque pensare a una successione infinità di infiniti sempre più grandi

$$\aleph_0 \longrightarrow \aleph_1 = 2^{\aleph_0} \longrightarrow \aleph_2 = 2^{\aleph_1} ......$$

Infiniti infiniti

- Prendiamo adesso l'insieme dei numeri interi ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$) che ha un numero di elementi pari ad un infinità numerabile ($\aleph_0$),
- adesso prendiamo l'insieme di tutte le sue parti;
- Cantor dimostrò che questo ha un numero di elementi infinito sì, ma più grande di $\aleph_0$,
- chiamò questo numero $\aleph_1$ (secondo numero transfinito)
- Il trucco è chiaro...Cantor potè dunque pensare a una successione infinità di infiniti sempre più grandi

$$\aleph_0 \longrightarrow \aleph_1 = 2^{\aleph_0} \longrightarrow \aleph_2 = 2^{\aleph_1} \ldots\ldots$$

Infiniti infiniti

- Prendiamo adesso l'insieme dei numeri interi ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$) che ha un numero di elementi pari ad un infinità numerabile ($\aleph_0$),
- adesso prendiamo l'insieme di tutte le sue parti;
- Cantor dimostrò che questo ha un numero di elementi infinito sì, ma più grande di $\aleph_0$,
- chiamò questo numero $\aleph_1$ (secondo numero transfinito)
- Il trucco è chiaro...Cantor potè dunque pensare a una successione infinità di infiniti sempre più grandi

$$\aleph_0 \longrightarrow \aleph_1 = 2^{\aleph_0} \longrightarrow \aleph_2 = 2^{\aleph_1} ......$$

Infiniti infiniti

- Prendiamo adesso l'insieme dei numeri interi ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$) che ha un numero di elementi pari ad un infinità numerabile ($\aleph_0$),
- adesso prendiamo l'insieme di tutte le sue parti;
- Cantor dimostrò che questo ha un numero di elementi infinito sì, ma più grande di $\aleph_0$,
- chiamò questo numero $\aleph_1$ (secondo numero transfinito)
- Il trucco è chiaro...Cantor potè dunque pensare a una successione infinità di infiniti sempre più grandi

$$\aleph_0 \longrightarrow \aleph_1 = 2^{\aleph_0} \longrightarrow \aleph_2 = 2^{\aleph_1} ......$$

Infiniti infiniti

- Prendiamo adesso l'insieme dei numeri interi ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$) che ha un numero di elementi pari ad un infinità numerabile ($\aleph_0$),
- adesso prendiamo l'insieme di tutte le sue parti;
- Cantor dimostrò che questo ha un numero di elementi infinito sì, ma più grande di $\aleph_0$,
- chiamò questo numero $\aleph_1$ (secondo numero transfinito)
- Il trucco è chiaro...Cantor potè dunque pensare a una successione infinità di infiniti sempre più grandi

$$\aleph_0 \longrightarrow \aleph_1 = 2^{\aleph_0} \longrightarrow \aleph_2 = 2^{\aleph_1} \dots\dots$$

Operare con l'infinito

- Cantor costruì poi le operazioni con i suoi numeri transfiniti
- ad esempio $\aleph_0 + \aleph_1 = \aleph_1$ e così via...
- per la prima volta in matematica l'infinito veniva trattato come tutti gli altri enti matematici,
- questo fatto non fu accettato subito ...e produsse infiniti dispiaceri a Cantor,
- che inoltre aveva un bel problema irrisolto....

Operare con l'infinito

- Cantor costruì poi le operazioni con i suoi numeri transfiniti
- ad esempio $\aleph_0 + \aleph_1 = \aleph_1$ e così via...
- per la prima volta in matematica l'infinito veniva trattato come tutti gli altri enti matematici,
- questo fatto non fu accettato subito ...e produsse infiniti dispiaceri a Cantor,
- che inoltre aveva un bel problema irrisolto....

Operare con l'infinito

- Cantor costruì poi le operazioni con i suoi numeri transfiniti
- ad esempio $\aleph_0 + \aleph_1 = \aleph_1$ e così via...
- per la prima volta in matematica l'infinito veniva trattato come tutti gli altri enti matematici,
- questo fatto non fu accettato subito ...e produsse infiniti dispiaceri a Cantor,
- che inoltre aveva un bel problema irrisolto....

Operare con l'infinito

- Cantor costruì poi le operazioni con i suoi numeri transfiniti
- ad esempio $\aleph_0 + \aleph_1 = \aleph_1$ e così via...
- per la prima volta in matematica l'infinito veniva trattato come tutti gli altri enti matematici,
- questo fatto non fu accettato subito ...e produsse infiniti dispiaceri a Cantor,
- che inoltre aveva un bel problema irrisolto....

Operare con l'infinito

- Cantor costruì poi le operazioni con i suoi numeri transfiniti
- ad esempio $\aleph_0 + \aleph_1 = \aleph_1$ e così via...
- per la prima volta in matematica l'infinito veniva trattato come tutti gli altri enti matematici,
- questo fatto non fu accettato subito ...e produsse infiniti dispiaceri a Cantor,
- che inoltre aveva un bel problema irrisolto....

Il problema del continuo

Cantor era convinto si potesse dimostrare che:

L'ipotesi del continuo

il tipo di infinito dell'insieme di tutti i "numeri con la virgola" ($\mathbb{R}$, insieme dei numeri reali) fosse proprio $\aleph_1$.

In altre parole:

- che i numeri reali fossero proprio tanti quanti tutte le possibili parti dell'insieme dei numeri interi

o

- che non ci fosse nessun infinito intermedio tra $\aleph_0$ e $\aleph_1$. Insomma, che la potenza del continuo fosse proprio $\aleph_1$.

Il problema del continuo

Cantor era convinto si potesse dimostrare che:

L'ipotesi del continuo

il tipo di infinito dell'insieme di tutti i "numeri con la virgola" ($\mathbb{R}$, insieme dei numeri reali) fosse proprio $\aleph_1$.

In altre parole:

- che i numeri reali fossero proprio tanti quanti tutte le possibili parti dell'insieme dei numeri interi

o

- che non ci fosse nessun infinito intermedio tra $\aleph_0$ e $\aleph_1$. Insomma, che la potenza del continuo fosse proprio $\aleph_1$.

Il problema del continuo

Cantor era convinto si potesse dimostrare che:

L'ipotesi del continuo

il tipo di infinito dell'insieme di tutti i "numeri con la virgola" ($\mathbb{R}$, insieme dei numeri reali) fosse proprio $\aleph_1$.

In altre parole:

- che i numeri reali fossero proprio tanti quanti tutte le possibili parti dell'insieme dei numeri interi

o

- che non ci fosse nessun infinito intermedio tra $\aleph_0$ e $\aleph_1$. Insomma, che la potenza del continuo fosse proprio $\aleph_1$.

Il problema del continuo

Cantor era convinto si potesse dimostrare che:

L'ipotesi del continuo

il tipo di infinito dell'insieme di tutti i "numeri con la virgola" ($\mathbb{R}$, insieme dei numeri reali) fosse proprio $\aleph_1$.

In altre parole:

- che i numeri reali fossero proprio tanti quanti tutte le possibili parti dell'insieme dei numeri interi

o

- che non ci fosse nessun infinito intermedio tra $\aleph_0$ e $\aleph_1$. Insomma, che la potenza del continuo fosse proprio $\aleph_1$.

Il problema del continuo

Cantor era convinto si potesse dimostrare che:

L'ipotesi del continuo

il tipo di infinito dell'insieme di tutti i "numeri con la virgola" ($\mathbb{R}$, insieme dei numeri reali) fosse proprio $\aleph_1$.

In altre parole:

- che i numeri reali fossero proprio tanti quanti tutte le possibili parti dell'insieme dei numeri interi

o

- che non ci fosse nessun infinito intermedio tra $\aleph_0$ e $\aleph_1$. Insomma, che la potenza del continuo fosse proprio $\aleph_1$.

Anche in paradiso ci sono pentole senza coperchi

- Cantor non riuscì mai a dimostrare l'ipotesi del continuo;
- Nel 1938 Kurt Gödel provò che, nell'ambito della teoria degli insiemi, assumere la validità dell'ipotesi del continuo non portava ad alcuna contraddizione,
- quindi non si poteva provare che l'ipotesi del continuo fosse falsa a partire dalla teoria degli insiemi.
- Nel 1966 Paul Cohen provò che, nell'ambito della teoria degli insiemi, assumere la falsità dell'ipotesi del continuo non portava ad alcuna contraddizione,
- quindi non si poteva provare che l'ipotesi del continuo fosse vera a partire dalla teoria degli insiemi.

Anche in paradiso ci sono pentole senza coperchi

- Cantor non riuscì mai a dimostrare l'ipotesi del continuo;
- Nel 1938 Kurt Gödel provò che, nell'ambito della teoria degli insiemi, assumere la validità dell'ipotesi del continuo non portava ad alcuna contraddizione,
- quindi non si poteva provare che l'ipotesi del continuo fosse falsa a partire dalla teoria degli insiemi.
- Nel 1966 Paul Cohen provò che, nell'ambito della teoria degli insiemi, assumere la falsità dell'ipotesi del continuo non portava ad alcuna contraddizione,
- quindi non si poteva provare che l'ipotesi del continuo fosse vera a partire dalla teoria degli insiemi.

Anche in paradiso ci sono pentole senza coperchi

- Cantor non riuscì mai a dimostrare l'ipotesi del continuo;
- Nel 1938 Kurt Gödel provò che, nell'ambito della teoria degli insiemi, assumere la validità dell'ipotesi del continuo non portava ad alcuna contraddizione,
- quindi non si poteva provare che l'ipotesi del continuo fosse falsa a partire dalla teoria degli insiemi.
- Nel 1966 Paul Cohen provò che, nell'ambito della teoria degli insiemi, assumere la falsità dell'ipotesi del continuo non portava ad alcuna contraddizione,
- quindi non si poteva provare che l'ipotesi del continuo fosse vera a partire dalla teoria degli insiemi.

Un problema indecidibile

L'ipotesi del continuo è un problema indecidibile (almeno nell'ambito della matematica classica).

- L'ipotesi del continuo è un esempio estremamente importante di problema indecidibile.
- L'esistenza di problemi così fatti era stata provata da Gödel nel suo Teorema di incompletezza
- la cui dimostrazione si basa sul fare dire alla Matematica, in linguaggio matematico, qualcosa che assomiglia a: "La matematica mente"....
- ...di nuovo l'infinito...questa volta sotto forma di ciclica ricorsività...
- e per finire una rappresentazione artistica di questa idea.

Un problema indecidibile

L'ipotesi del continuo è un problema indecidibile (almeno nell'ambito della matematica classica).

- L'ipotesi del continuo è un esempio estremamente importante di problema indecidibile.
- L'esistenza di problemi così fatti era stata provata da Gödel nel suo Teorema di incompletezza
- la cui dimostrazione si basa sul fare dire alla Matematica, in linguaggio matematico, qualcosa che assomiglia a: "La matematica mente"....
- ...di nuovo l'infinito...questa volta sotto forma di ciclica ricorsività...
- e per finire una rappresentazione artistica di questa idea.

Un problema indecidibile

L'ipotesi del continuo è un problema indecidibile (almeno nell'ambito della matematica classica).

- L'ipotesi del continuo è un esempio estremamente importante di problema indecidibile.
- L'esistenza di problemi così fatti era stata provata da Gödel nel suo Teorema di incompletezza
- la cui dimostrazione si basa sul fare dire alla Matematica, in linguaggio matematico, qualcosa che assomiglia a: "La matematica mente"....
- ...di nuovo l'infinito...questa volta sotto forma di ciclica ricorsività...
- e per finire una rappresentazione artistica di questa idea.

Un problema indecidibile

L'ipotesi del continuo è un problema indecidibile (almeno nell'ambito della matematica classica).

- L'ipotesi del continuo è un esempio estremamente importante di problema indecidibile.
- L'esistenza di problemi così fatti era stata provata da Gödel nel suo Teorema di incompletezza
- la cui dimostrazione si basa sul fare dire alla Matematica, in linguaggio matematico, qualcosa che assomiglia a: "La matematica mente"....
- ...di nuovo l'infinito...questa volta sotto forma di ciclica ricorsività...
- e per finire una rappresentazione artistica di questa idea.

Un problema indecidibile

L'ipotesi del continuo è un problema indecidibile (almeno nell'ambito della matematica classica).

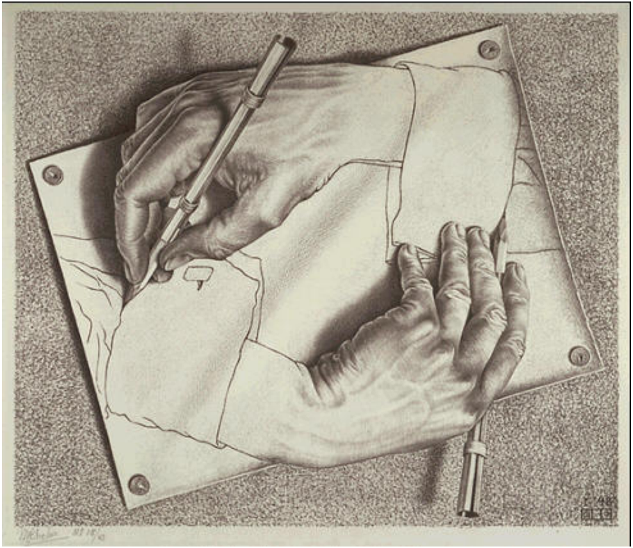
- L'ipotesi del continuo è un esempio estremamente importante di problema indecidibile.
- L'esistenza di problemi così fatti era stata provata da Gödel nel suo Teorema di incompletezza
- la cui dimostrazione si basa sul fare dire alla Matematica, in linguaggio matematico, qualcosa che assomiglia a: "La matematica mente"....
- ...di nuovo l'infinito...questa volta sotto forma di ciclica ricorsività...
- e per finire una rappresentazione artistica di questa idea.

Un problema indecidibile

L'ipotesi del continuo è un problema indecidibile (almeno nell'ambito della matematica classica).

- L'ipotesi del continuo è un esempio estremamente importante di problema indecidibile.
- L'esistenza di problemi così fatti era stata provata da Gödel nel suo Teorema di incompletezza
- la cui dimostrazione si basa sul fare dire alla Matematica, in linguaggio matematico, qualcosa che assomiglia a: "La matematica mente"....
- ...di nuovo l'infinito...questa volta sotto forma di ciclica ricorsività...
- e per finire una rappresentazione artistica di questa idea.

Escher



Caso mai aveste voglia di saperne di più

- C.B. Boyer; Storia della matematica. Mondadori (1980);
- A. Deledicq & F. Casiro; Addomesticare l'infinito. Edizioni Kangourou Italia (2005);
- T. Gowers; Matematica, Einaudi, (2004);
- D. Hofdstadter; *Gödel, Escher, Bach.* Adelphi (1984);
- G. Lolli; *Da Euclide a Gödel.* Il Mulino (2004);
- E. Nagel & J.R.Newman; *La prova di Gödel.* Boringhieri (1974);
- P. Odifreddi; La Matematica del '900. Einaudi (2000);
- P. Zellini; Breve storia dell'infinito. Adelphi (1980)

e per finire due fumetti:

- D. Osenda; Ultima lezione a Gottinga. 001 Edizioni (2009).
- A. Doxiadis & C.H. Papadimitriou, Logicomix, Guanda (2010)

Caso mai aveste voglia di saperne di più

- C.B. Boyer; Storia della matematica. Mondadori (1980);
- A. Deledicq & F. Casiro; Addomesticare l'infinito. Edizioni Kangourou Italia (2005);
- T. Gowers; Matematica, Einaudi, (2004);
- D. Hofdstadter; *Gödel, Escher, Bach.* Adelphi (1984);
- G. Lolli; *Da Euclide a Gödel.* Il Mulino (2004);
- E. Nagel & J.R.Newman; *La prova di Gödel.* Boringhieri (1974);
- P. Odifreddi; La Matematica del '900. Einaudi (2000);
- P. Zellini; Breve storia dell'infinito. Adelphi (1980)

e per finire due fumetti:

- D. Osenda; Ultima lezione a Gottinga. 001 Edizioni (2009).
- A. Doxiadis & C.H. Papadimitriou, Logicomix, Guanda (2010)

Caso mai aveste voglia di saperne di più

- C.B. Boyer; Storia della matematica. Mondadori (1980);
- A. Deledicq & F. Casiro; Addomesticare l'infinito. Edizioni Kangourou Italia (2005);
- T. Gowers; Matematica, Einaudi, (2004);
- D. Hofdstadter; *Gödel, Escher, Bach.* Adelphi (1984);
- G. Lolli; *Da Euclide a Gödel.* Il Mulino (2004);
- E. Nagel & J.R.Newman; *La prova di Gödel.* Boringhieri (1974);
- P. Odifreddi; La Matematica del '900. Einaudi (2000);
- P. Zellini; Breve storia dell'infinito. Adelphi (1980)

e per finire due fumetti:

- D. Osenda; Ultima lezione a Gottinga. 001 Edizioni (2009).
- A. Doxiadis & C.H. Papadimitriou, Logicomix, Guanda (2010)

Caso mai aveste voglia di saperne di più

- C.B. Boyer; Storia della matematica. Mondadori (1980);
- A. Deledicq & F. Casiro; Addomesticare l'infinito. Edizioni Kangourou Italia (2005);
- T. Gowers; Matematica, Einaudi, (2004);
- D. Hofdstadter; *Gödel, Escher, Bach.* Adelphi (1984);
- G. Lolli; *Da Euclide a Gödel.* Il Mulino (2004);
- E. Nagel & J.R.Newman; *La prova di Gödel.* Boringhieri (1974);
- P. Odifreddi; La Matematica del '900. Einaudi (2000);
- P. Zellini; Breve storia dell'infinito. Adelphi (1980)

e per finire due fumetti:

- D. Osenda; Ultima lezione a Gottinga. 001 Edizioni (2009).
- A. Doxiadis & C.H. Papadimitriou, Logicomix, Guanda (2010)