Infinito contare, contare l'infinito

Contare e ordinare

Enrico Miglierina

Dipartimento di Matematica per le Scienze Economiche, Finanziarie ed Attuariali
Università Cattolica del Sacro Cuore
Milano

14 marzo 2025 3/14/2025

I numeri (interi)

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

sono alla base della matematica (e di molto altro...)

"Dio creò i numeri naturali, il resto è opera umana"
(Leopold Kronecker 1823-1891)

I numeri interi servono per fare due cose (e forse molte altre...):

- contare: uno, due, tre,...,
- ordinare: primo, secondo, terzo,....

I numeri (interi)

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

sono alla base della matematica (e di molto altro...)

"Dio creò i numeri naturali, il resto è opera umana"
(Leopold Kronecker 1823-1891)

I numeri interi servono per fare due cose (e forse molte altre...):

- contare: uno, due, tre,...,
- ordinare: primo, secondo, terzo,....

I numeri (interi)

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

sono alla base della matematica (e di molto altro...)

"Dio creò i numeri naturali, il resto è opera umana"
(Leopold Kronecker 1823-1891)

I numeri interi servono per fare due cose (e forse molte altre...):

- contare: uno, due, tre,...,
- ordinare: primo, secondo, terzo,....

I numeri (interi)

$$\color{red}{0}, 1, 2, 3, \ldots$$

sono alla base della matematica (e di molto altro...)

"Dio creò i numeri naturali, il resto è opera umana"
(Leopold Kronecker 1823-1891)

I numeri interi servono per fare due cose (e forse molte altre...):

- contare: uno, due, tre,...,
- ordinare: primo, secondo, terzo,....

Parte 1

Contare

La cardinalità di un insieme e il contare

- Voglio poter contare gli elementi di un insieme per poter dire quando due insiemi hanno lo stesso numero di elementi (un matematico direbbe la stessa cardinalità)
- O in altri termini: perchè 3 mele sono, dal punto di vista della "numerosità", lo stesso che 3 pere?
- Perchè ad una pera posso associare una e una sola mela in modo ben definito:

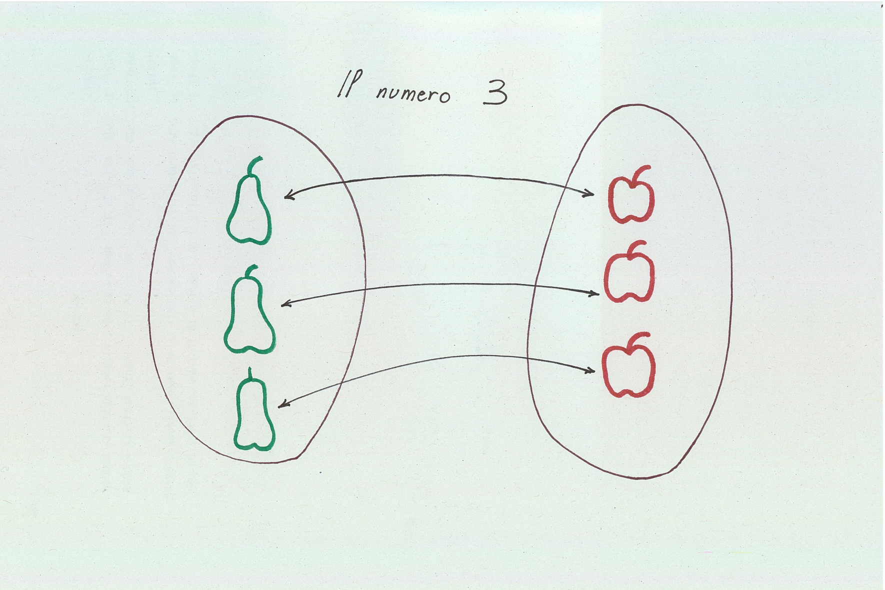
La cardinalità di un insieme e il contare

- Voglio poter contare gli elementi di un insieme per poter dire quando due insiemi hanno lo stesso numero di elementi (un matematico direbbe la stessa cardinalità)
- O in altri termini: perchè 3 mele sono, dal punto di vista della "numerosità", lo stesso che 3 pere?
- Perchè ad una pera posso associare una e una sola mela in modo ben definito:

La cardinalità di un insieme e il contare

- Voglio poter contare gli elementi di un insieme per poter dire quando due insiemi hanno lo stesso numero di elementi (un matematico direbbe la stessa cardinalità)
- O in altri termini: perchè 3 mele sono, dal punto di vista della "numerosità", lo stesso che 3 pere?
- Perchè ad una pera posso associare una e una sola mela in modo ben definito:

Il numero 3



- Contare un numero finito n di oggetti è dunque mettere in corrispondenza biunivoca questi oggetti con l'insieme

$$\{1, 2, 3, \ldots, n\}.$$

- Quando però si ha a che fare con un'infinità di elementi le cose cambiano...

- Contare un numero finito n di oggetti è dunque mettere in corrispondenza biunivoca questi oggetti con l'insieme

$$\{1, 2, 3, \ldots, n\}.$$

- Quando però si ha a che fare con un'infinità di elementi le cose cambiano...

La riflessione sui fondamenti

- Fino alla fine del '800 l'infinito viene "usato" in matematica senza dare adito ad una vera e propria profonda riflessione sulle sue proprietà (naturalmente con le dovute eccezioni, ad esempio Galileo Galilei) ed ai problemi che queste aprono.
- In questo periodo, però, assume grande rilevanza il problema di dare un solido fondamento alla matematica.
- In questo ambito (a cavallo tra logica e matematica) il concetto di infinito tornerà prepotentemente alla ribalta.

La riflessione sui fondamenti

- Fino alla fine del '800 l'infinito viene "usato" in matematica senza dare adito ad una vera e propria profonda riflessione sulle sue proprietà (naturalmente con le dovute eccezioni, ad esempio Galileo Galilei) ed ai problemi che queste aprono.
- In questo periodo, però, assume grande rilevanza il problema di dare un solido fondamento alla matematica.
- In questo ambito (a cavallo tra logica e matematica) il concetto di infinito tornerà prepotentemente alla ribalta.

La riflessione sui fondamenti

- Fino alla fine del '800 l'infinito viene “usato” in matematica senza dare adito ad una vera e propria profonda riflessione sulle sue proprietà (naturalmente con le dovute eccezioni, ad esempio Galileo Galilei) ed ai problemi che queste aprono.
- In questo periodo, però, assume grande rilevanza il problema di dare un solido fondamento alla matematica.
- In questo ambito (a cavallo tra logica e matematica) il concetto di infinito tornerà prepotentemente alla ribalta.

David Hilbert (1862 - 1943)

Se una notte (d'inverno) un viaggiatore...

- Siamo nel 1900. L'illustre dottor David Hilbert è in viaggio per andare a Parigi al convegno mondiale dei matematici.
- E' sera.
- Arriva all'Albergo dalle Infinite Stanze...
- ...che sfortunatamente è al completo.

Se una notte (d'inverno) un viaggiatore...

- Siamo nel 1900. L'illustre dottor David Hilbert è in viaggio per andare a Parigi al convegno mondiale dei matematici.
- E' sera.
- Arriva all'Albergo dalle Infinite Stanze...
- ...che sfortunatamente è al completo.

Se una notte (d'inverno) un viaggiatore...

- Siamo nel 1900. L'illustre dottor David Hilbert è in viaggio per andare a Parigi al convegno mondiale dei matematici.
- E' sera.
- Arriva all'Albergo dalle Infinite Stanze...
- ...che sfortunatamente è al completo.

Se una notte (d'inverno) un viaggiatore...

- Siamo nel 1900. L'illustre dottor David Hilbert è in viaggio per andare a Parigi al convegno mondiale dei matematici.
- E' sera.
- Arriva all'Albergo dalle Infinite Stanze...
- ...che sfortunatamente è al completo.

Con la matematica ci si arrangia

Portiere dell'albergo: Ho le infinite stanze tutte occupate...Mi spiace proprio...non so dove sistemarla

Hilbert: Non vedo quale sia il problema...

Portiere:.. ma se le dico che tutte le stanze sono occupate.

Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 3 e cosi via...

Portiere: Non capisco ...?

Hilbert: Guardi se segue le mie indicazioni, e cioè se chiede ad ogni cliente di spostarsi dalla sua stanza a quella che porta il numero più grande di uno, lei avrà la stanza 1 libera e contemporaneamente tutti i clienti avranno comunque una stanza.

Portiere:....ci sono...la prego, si accomodi !

Con la matematica ci si arrangia

Portiere dell'albergo: Ho le infinite stanze tutte occupate...Mi spiace proprio...non so dove sistemarla
Hilbert: Non vedo quale sia il problema...
Portiere:.. ma se le dico che tutte le stanze sono occupate.
Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 3 e cosi via...
Portiere: Non capisco ...?
Hilbert: Guardi se segue le mie indicazioni, e cioè se chiede ad ogni cliente di spostarsi dalla sua stanza a quella che porta il numero più grande di uno, lei avrà la stanza 1 libera e contemporaneamente tutti i clienti avranno comunque una stanza.
Portiere:....ci sono...la prego, si accomodi !

Con la matematica ci si arrangia

Portiere dell'albergo: Ho le infinite stanze tutte occupate...Mi spiace proprio...non so dove sistemarla
Hilbert: Non vedo quale sia il problema...
Portiere:.. ma se le dico che tutte le stanze sono occupate.
Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 3 e cosi via...
Portiere: Non capisco ...?
Hilbert: Guardi se segue le mie indicazioni, e cioè se chiede ad ogni cliente di spostarsi dalla sua stanza a quella che porta il numero più grande di uno, lei avrà la stanza 1 libera e contemporaneamente tutti i clienti avranno comunque una stanza.
Portiere:....ci sono...la prego, si accomodi !

Con la matematica ci si arrangia

Portiere dell'albergo: Ho le infinite stanze tutte occupate...Mi spiace proprio...non so dove sistemarla
Hilbert: Non vedo quale sia il problema...
Portiere:.. ma se le dico che tutte le stanze sono occupate.
Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 3 e cosi via...
Portiere: Non capisco ...?
Hilbert: Guardi se segue le mie indicazioni, e cioè se chiede ad ogni cliente di spostarsi dalla sua stanza a quella che porta il numero più grande di uno, lei avrà la stanza 1 libera e contemporaneamente tutti i clienti avranno comunque una stanza.
Portiere:....ci sono...la prego, si accomodi !

Con la matematica ci si arrangia

Portiere dell'albergo: Ho le infinite stanze tutte occupate...Mi spiace proprio...non so dove sistemarla
Hilbert: Non vedo quale sia il problema...
Portiere:.. ma se le dico che tutte le stanze sono occupate.
Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 3 e cosi via...
Portiere: Non capisco ...?
Hilbert: Guardi se segue le mie indicazioni, e cioè se chiede ad ogni cliente di spostarsi dalla sua stanza a quella che porta il numero più grande di uno, lei avrà la stanza 1 libera e contemporaneamente tutti i clienti avranno comunque una stanza.
Portiere:....ci sono...la prego, si accomodi !

Con la matematica ci si arrangia

Portiere dell'albergo: Ho le infinite stanze tutte occupate...Mi spiace proprio...non so dove sistemarla
Hilbert: Non vedo quale sia il problema...
Portiere:.. ma se le dico che tutte le stanze sono occupate.
Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 3 e cosi via...
Portiere: Non capisco ...?
Hilbert: Guardi se segue le mie indicazioni, e cioè se chiede ad ogni cliente di spostarsi dalla sua stanza a quella che porta il numero più grande di uno, lei avrà la stanza 1 libera e contemporaneamente tutti i clienti avranno comunque una stanza.
Portiere:....ci sono...la prego, si accomodi !

Con la matematica ci si arrangia

Portiere dell'albergo: Ho le infinite stanze tutte occupate...Mi spiace proprio...non so dove sistemarla
Hilbert: Non vedo quale sia il problema...
Portiere:.. ma se le dico che tutte le stanze sono occupate.
Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 3 e cosi via...
Portiere: Non capisco ...?
Hilbert: Guardi se segue le mie indicazioni, e cioè se chiede ad ogni cliente di spostarsi dalla sua stanza a quella che porta il numero più grande di uno, lei avrà la stanza 1 libera e contemporaneamente tutti i clienti avranno comunque una stanza.
Portiere:....ci sono...la prego, si accomodi !

In formule

- Quanto detto si potrebbe riassumere con la formula

$$\infty + 1 = \infty.$$

- Naturamente si ha anche

$$\infty + 2 = \infty; \quad \infty + 585 = \infty \quad \infty + 100000000 = \infty.$$

- Insomma, se all'infinito si aggiunge un numero finito si ottiene sempre l'infinito.

In formule

- Quanto detto si potrebbe riassumere con la formula

$$\infty + 1 = \infty.$$

- Naturamente si ha anche

$$\infty + 2 = \infty; \quad \infty + 585 = \infty \quad \infty + 100000000 = \infty.$$

- Insomma, se all'infinito si aggiunge un numero finito si ottiene sempre l'infinito.

In formule

- Quanto detto si potrebbe riassumere con la formula

$$\infty + 1 = \infty.$$

- Naturamente si ha anche

$$\infty + 2 = \infty; \quad \infty + 585 = \infty \quad \infty + 100000000 = \infty.$$

- Insomma, se all'infinito si aggiunge un numero finito si ottiene sempre l'infinito.

Un numero infinito di clienti

Alcuni giorni dopo:

Portiere dell'albergo: Mi aiuti ...E' in arrivo un treno con un numero infinito di suoi colleghi per il convegno...adesso non so proprio come sistemarli...

Hilbert: Non vedo quale sia il problema...

Portiere:.. ma come,... con il suo arrivo l'albergo è pieno.

Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 4, a quello nella stanza 3 nella stanza 6 e così via...

Portiere: E a questo punto ho le stanze con numeri dispari tutte libere...e sono in numero infinite...sistemo così tutti i nuovi ospiti...Vede che ho imparato presto.

Hilbert: Complimenti...anche se qualche imprevisto potrebbe sempre accadere.

Un numero infinito di clienti

Alcuni giorni dopo:
Portiere dell'albergo: Mi aiuti ...E' in arrivo un treno con un numero infinito di suoi colleghi per il convegno...adesso non so proprio come sistemarli...
Hilbert: Non vedo quale sia il problema...
Portiere:.. ma come,... con il suo arrivo l'albergo è pieno.
Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 4, a quello nella stanza 3 nella stanza 6 e così via...
Portiere: E a questo punto ho le stanze con numeri dispari tutte libere...e sono in numero infinite...sistemo così tutti i nuovi ospiti...Vede che ho imparato presto.
Hilbert: Complimenti...anche se qualche imprevisto potrebbe sempre accadere.

Un numero infinito di clienti

Alcuni giorni dopo:
Portiere dell'albergo: Mi aiuti ...E' in arrivo un treno con un numero infinito di suoi colleghi per il convegno...adesso non so proprio come sistemarli...
Hilbert: Non vedo quale sia il problema...
Portiere:.. ma come,... con il suo arrivo l'albergo è pieno.
Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 4, a quello nella stanza 3 nella stanza 6 e così via...
Portiere: E a questo punto ho le stanze con numeri dispari tutte libere...e sono in numero infinite...sistemo così tutti i nuovi ospiti...Vede che ho imparato presto.
Hilbert: Complimenti...anche se qualche imprevisto potrebbe sempre accadere.

Un numero infinito di clienti

Alcuni giorni dopo:
Portiere dell'albergo: Mi aiuti ...E' in arrivo un treno con un numero infinito di suoi colleghi per il convegno...adesso non so proprio come sistemarli...
Hilbert: Non vedo quale sia il problema...
Portiere:.. ma come,... con il suo arrivo l'albergo è pieno.
Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 4, a quello nella stanza 3 nella stanza 6 e così via...
Portiere: E a questo punto ho le stanze con numeri dispari tutte libere...e sono in numero infinite...sistemo così tutti i nuovi ospiti...Vede che ho imparato presto.
Hilbert: Complimenti...anche se qualche imprevisto potrebbe sempre accadere.

Un numero infinito di clienti

Alcuni giorni dopo:
Portiere dell'albergo: Mi aiuti ...E' in arrivo un treno con un numero infinito di suoi colleghi per il convegno...adesso non so proprio come sistemarli...
Hilbert: Non vedo quale sia il problema...
Portiere:.. ma come,... con il suo arrivo l'albergo è pieno.
Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 4, a quello nella stanza 3 nella stanza 6 e così via...
Portiere: E a questo punto ho le stanze con numeri dispari tutte libere...e sono in numero infinite...sistemo così tutti i nuovi ospiti...Vede che ho imparato presto.
Hilbert: Complimenti...anche se qualche imprevisto potrebbe sempre accadere.

Un numero infinito di clienti

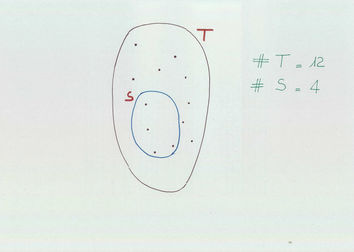
Alcuni giorni dopo:
Portiere dell'albergo: Mi aiuti ...E' in arrivo un treno con un numero infinito di suoi colleghi per il convegno...adesso non so proprio come sistemarli...
Hilbert: Non vedo quale sia il problema...
Portiere:.. ma come,... con il suo arrivo l'albergo è pieno.
Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 4, a quello nella stanza 3 nella stanza 6 e così via...
Portiere: E a questo punto ho le stanze con numeri dispari tutte libere...e sono in numero infinite...sistemo così tutti i nuovi ospiti...Vede che ho imparato presto.
Hilbert: Complimenti...anche se qualche imprevisto potrebbe sempre accadere.

Un numero infinito di clienti

Alcuni giorni dopo:
Portiere dell'albergo: Mi aiuti ...E' in arrivo un treno con un numero infinito di suoi colleghi per il convegno...adesso non so proprio come sistemarli...
Hilbert: Non vedo quale sia il problema...
Portiere:.. ma come,... con il suo arrivo l'albergo è pieno.
Hilbert: mi scusi...chieda al cliente che sta nella stanza 1 di andare nella stanza 2, a quello della stanza 2 di andare nella stanza 4, a quello nella stanza 3 nella stanza 6 e così via...
Portiere: E a questo punto ho le stanze con numeri dispari tutte libere...e sono in numero infinite...sistemo così tutti i nuovi ospiti...Vede che ho imparato presto.
Hilbert: Complimenti...anche se qualche imprevisto potrebbe sempre accadere.

Insiemi e sottoinsiemi

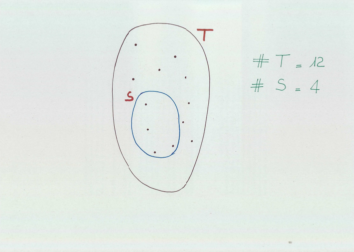
- Se prendo un sottoinsieme (proprio) S di un insieme T di oggetti qualunque sembra naturale dire che S ha un numero minore di elementi rispetto a T.



- Questa affermazione è sempre vera se il numero degli elementi di T è finito. Non vale invece se T ha un numero infinito di elementi.

Insiemi e sottoinsiemi

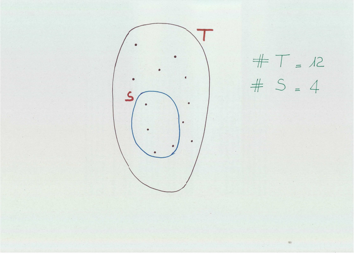
- Se prendo un sottoinsieme (proprio) S di un insieme T di oggetti qualunque sembra naturale dire che S ha un numero minore di elementi rispetto a T.



- Questa affermazione è sempre vera se il numero degli elementi di T è finito. Non vale invece se T ha un numero infinito di elementi.

Insiemi e sottoinsiemi

- Se prendo un sottoinsieme (proprio) S di un insieme T di oggetti qualunque sembra naturale dire che S ha un numero minore di elementi rispetto a T.



- Questa affermazione è sempre vera se il numero degli elementi di T è finito. Non vale invece se T ha un numero infinito di elementi.

Pari e dispari (si torna a Galileo)

- Con $\mathbb{N}$ si indica l'insieme di tutti i numeri interi non negativi (numeri naturali):

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}.$$

- Naturalmente i pari sono un sottoinsieme di $\mathbb{N}$....ma quanti sono rispetto agli elementi di $\mathbb{N}$?

$\mathbb{N}$		pari
0	$\longleftrightarrow$	0
1	$\longleftrightarrow$	2
2	$\longleftrightarrow$	4
3	$\longleftrightarrow$	6
...	$\longleftrightarrow$	...
n	$\longleftrightarrow$	$2n$
...	$\longleftrightarrow$	...

Pari e dispari (si torna a Galileo)

- Con $\mathbb{N}$ si indica l'insieme di tutti i numeri interi non negativi (numeri naturali):

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}.$$

- Naturalmente i pari sono un sottoinsieme di $\mathbb{N}$....ma quanti sono rispetto agli elementi di $\mathbb{N}$?

$\mathbb{N}$		pari
0	$\longleftrightarrow$	0
1	$\longleftrightarrow$	2
2	$\longleftrightarrow$	4
3	$\longleftrightarrow$	6
…	$\longleftrightarrow$	…
n	$\longleftrightarrow$	$2n$
…	$\longleftrightarrow$	…

Pari e dispari (si torna a Galileo)

- Con $\mathbb{N}$ si indica l'insieme di tutti i numeri interi non negativi (numeri naturali):

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\} .$$

- Naturalmente i pari sono un sottoinsieme di $\mathbb{N}$....ma quanti sono rispetto agli elementi di $\mathbb{N}$?

$\mathbb{N}$		pari
0	$\longleftrightarrow$	0
1	$\longleftrightarrow$	2
2	$\longleftrightarrow$	4
3	$\longleftrightarrow$	6
$\ldots$	$\longleftrightarrow$	$\ldots$
n	$\longleftrightarrow$	$2n$
$\ldots$	$\longleftrightarrow$	$\ldots$

Insiemi con infiniti elementi

- La risposta alla nostra domanda è dunque: ci sono tanti numeri pari quanti tutti i numeri naturali.
- Abbiamo dunque un insieme contenuto dentro $\mathbb{N}$ (diverso da $\mathbb{N}$ stesso) ma che ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$.
- Situazioni di questo tipo possono accadere se e solo se si ha a che fare con insiemi che posseggono infiniti elementi.
- Gli insiemi che hanno la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$ si dicono avere la potenza del numerabile.
- Infatti i loro elementi possono essere numerati con i numeri naturali.

Insiemi con infiniti elementi

- La risposta alla nostra domanda è dunque: ci sono tanti numeri pari quanti tutti i numeri naturali.
- Abbiamo dunque un insieme contenuto dentro $\mathbb{N}$ (diverso da $\mathbb{N}$ stesso) ma che ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$.
- Situazioni di questo tipo possono accadere se e solo se si ha a che fare con insiemi che posseggono infiniti elementi.
- Gli insiemi che hanno la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$ si dicono avere la potenza del numerabile.
- Infatti i loro elementi possono essere numerati con i numeri naturali.

Insiemi con infiniti elementi

- La risposta alla nostra domanda è dunque: ci sono tanti numeri pari quanti tutti i numeri naturali.
- Abbiamo dunque un insieme contenuto dentro $\mathbb{N}$ (diverso da $\mathbb{N}$ stesso) ma che ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$.
- Situazioni di questo tipo possono accadere se e solo se si ha a che fare con insiemi che posseggono infiniti elementi.
- Gli insiemi che hanno la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$ si dicono avere la potenza del numerabile.
- Infatti i loro elementi possono essere numerati con i numeri naturali.

Insiemi con infiniti elementi

- La risposta alla nostra domanda è dunque: ci sono tanti numeri pari quanti tutti i numeri naturali.
- Abbiamo dunque un insieme contenuto dentro $\mathbb{N}$ (diverso da $\mathbb{N}$ stesso) ma che ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$.
- Situazioni di questo tipo possono accadere se e solo se si ha a che fare con insiemi che posseggono infiniti elementi.
- Gli insiemi che hanno la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$ si dicono avere la potenza del numerabile.
- Infatti i loro elementi possono essere numerati con i numeri naturali.

Insiemi con infiniti elementi

- La risposta alla nostra domanda è dunque: ci sono tanti numeri pari quanti tutti i numeri naturali.
- Abbiamo dunque un insieme contenuto dentro $\mathbb{N}$ (diverso da $\mathbb{N}$ stesso) ma che ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$.
- Situazioni di questo tipo possono accadere se e solo se si ha a che fare con insiemi che posseggono infiniti elementi.
- Gli insiemi che hanno la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$ si dicono avere la potenza del numerabile.
- Infatti i loro elementi possono essere numerati con i numeri naturali.

Georg Cantor (1845 - 1918)

“L’essenza della matematica risiede nella sua libertà” *G. Cantor*
“Nessuno ci scaccerà dal Paradiso che Cantor ci ha procurato” *D. Hilbert*

I numeri razionali

- Oltre ai numeri naturali noi conosciamo certamente altri numeri:
- Le frazioni: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}$.....
- L'insieme di tutte le possibili frazioni si indica con $\mathbb{Q}$ e i suoi elementi vengono chiamati numeri razionali

I numeri razionali

- Oltre ai numeri naturali noi conosciamo certamente altri numeri:
- Le frazioni: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}$.....
- L'insieme di tutte le possibili frazioni si indica con $\mathbb{Q}$ e i suoi elementi vengono chiamati numeri razionali

I numeri razionali

- Oltre ai numeri naturali noi conosciamo certamente altri numeri:
- Le frazioni: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}$.....
- L'insieme di tutte le possibili frazioni si indica con $\mathbb{Q}$ e i suoi elementi vengono chiamati numeri razionali

I numeri decimali

- I numeri razionali hanno un'altra faccia:
- ogni frazione si può rappresentare con un "numero con la virgola": ad esempio

$$\frac{1}{2} = 0,5 \quad \frac{4}{3} = 1,33333.....$$

- questo numero però ha delle caratteristiche precise: o
  - ha un numero finito di cifre dopo la virgola, oppure
  - ha un numero infinito di cifre dopo la virgola ma con un blocco di cifre finito che si ripete infinite volte (numero periodico)

I numeri decimali

- I numeri razionali hanno un'altra faccia:
- ogni frazione si può rappresentare con un "numero con la virgola": ad esempio

$$\frac{1}{2} = 0,5 \quad \frac{4}{3} = 1,33333.....$$

- questo numero però ha delle caratteristiche precise: o
  - ha un numero finito di cifre dopo la virgola, oppure
  - ha un numero infinito di cifre dopo la virgola ma con un blocco di cifre finito che si ripete infinite volte (numero periodico)

I numeri decimali

- I numeri razionali hanno un'altra faccia:
- ogni frazione si può rappresentare con un "numero con la virgola": ad esempio

$$\frac{1}{2} = 0,5 \quad \frac{4}{3} = 1,33333.....$$

- questo numero però ha delle caratteristiche precise: o
  - ha un numero finito di cifre dopo la virgola, oppure
  - ha un numero infinito di cifre dopo la virgola ma con un blocco di cifre finito che si ripete infinite volte (numero periodico)

I numeri decimali

- I numeri razionali hanno un'altra faccia:
- ogni frazione si può rappresentare con un "numero con la virgola": ad esempio

$$\frac{1}{2} = 0,5 \quad \frac{4}{3} = 1,33333.....$$

- questo numero però ha delle caratteristiche precise: o
  - ha un numero finito di cifre dopo la virgola, oppure
  - ha un numero infinito di cifre dopo la virgola ma con un blocco di cifre finito che si ripete infinite volte (numero periodico)

I numeri decimali

- I numeri razionali hanno un'altra faccia:
- ogni frazione si può rappresentare con un "numero con la virgola": ad esempio

$$\frac{1}{2} = 0,5 \quad \frac{4}{3} = 1,33333.....$$

- questo numero però ha delle caratteristiche precise: o
  - ha un numero finito di cifre dopo la virgola, oppure
  - ha un numero infinito di cifre dopo la virgola ma con un blocco di cifre finito che si ripete infinite volte (numero periodico)

I numeri irrazionali

- Fin dalla Grecia antica (Pitagorici - Ippaso di Metaponto) si sa però che esistono numeri che non si possono scrivere come rapporti fra numeri interi,
- sono i numeri irrazionali.

$\sqrt{2}$

Il primo esempio di numero irrazionale è $\sqrt{2} = 1,41....$ Questo numero è la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1.

I numeri irrazionali

- Fin dalla Grecia antica (Pitagorici - Ippaso di Metaponto) si sa però che esistono numeri che non si possono scrivere come rapporti fra numeri interi,
- sono i numeri irrazionali.

$\sqrt{2}$

Il primo esempio di numero irrazionale è $\sqrt{2} = 1,41\ldots$. Questo numero è la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1.

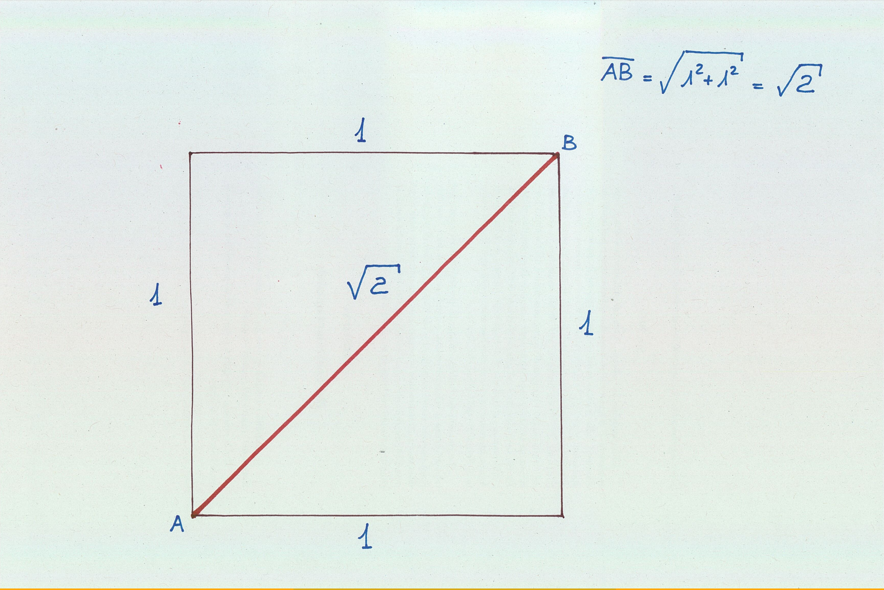
I numeri irrazionali

- Fin dalla Grecia antica (Pitagorici - Ippaso di Metaponto) si sa però che esistono numeri che non si possono scrivere come rapporti fra numeri interi,
- sono i numeri irrazionali.

$\sqrt{2}$

Il primo esempio di numero irrazionale è $\sqrt{2} = 1,41\ldots$. Questo numero è la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1.

La diagonale del quadrato



I numeri reali

- Se mettiamo insieme i numeri razionali con quelli irrazionali otteniamo l'insieme dei numeri reali (che si indica con $\mathbb{R}$)
- cioè di tutti i possibili "numeri con la virgola", indipendentemente dal comportamento delle cifre dopo la virgola
- I numeri reali si possono mettere in corrispondenza uno a uno con i punti della retta.

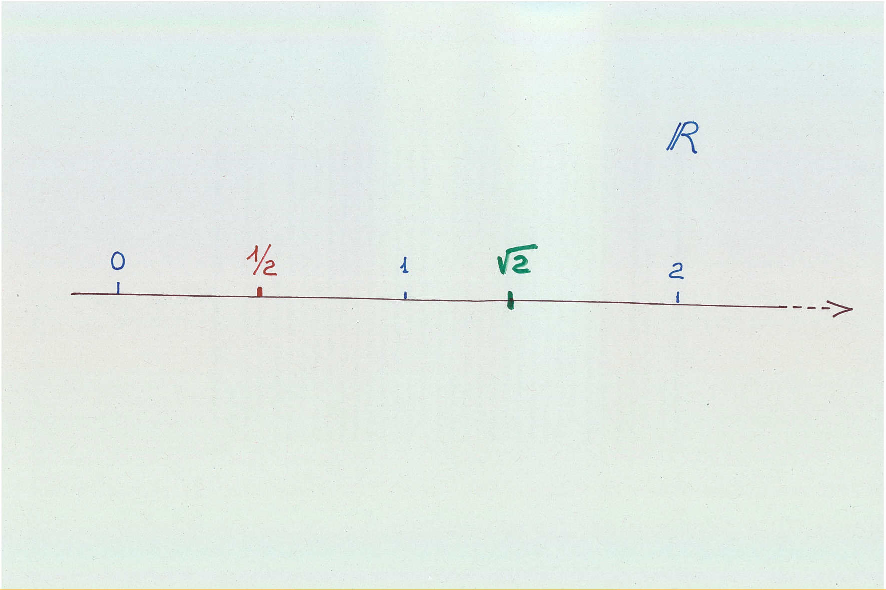
I numeri reali

- Se mettiamo insieme i numeri razionali con quelli irrazionali otteniamo l'insieme dei numeri reali (che si indica con $\mathbb{R}$)
- cioè di tutti i possibili "numeri con la virgola", indipendentemente dal comportamento delle cifre dopo la virgola
- I numeri reali si possono mettere in corrispondenza uno a uno con i punti della retta.

I numeri reali

- Se mettiamo insieme i numeri razionali con quelli irrazionali otteniamo l'insieme dei numeri reali (che si indica con $\mathbb{R}$)
- cioè di tutti i possibili "numeri con la virgola", indipendentemente dal comportamento delle cifre dopo la virgola
- I numeri reali si possono mettere in corrispondenza uno a uno con i punti della retta.

La retta reale



Cantor e l'infinito attuale

- Cantor si occupò dello studio della teoria degli insiemi
- in particolare, studiò gli insiemi costituiti da infiniti elementi

Esistono diversi infiniti ?

Cantor si pose il problema del confronto (della cardinalità) di insiemi infiniti.

- La prima scoperta importante fu che l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali ha tanti elementi quanti l'insieme $\mathbb{Q}$,
- infatti le frazioni possono essere messe in relazione con i numeri interi secondo il famoso procedimento diagonale di Cantor

Cantor e l'infinito attuale

- Cantor si occupò dello studio della teoria degli insiemi
- in particolare, studiò gli insiemi costituiti da infiniti elementi

Esistono diversi infiniti ?

Cantor si pose il problema del confronto (della cardinalità) di insiemi infiniti.

- La prima scoperta importante fu che l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali ha tanti elementi quanti l'insieme $\mathbb{Q}$,
- infatti le frazioni possono essere messe in relazione con i numeri interi secondo il famoso procedimento diagonale di Cantor

Cantor e l'infinito attuale

- Cantor si occupò dello studio della teoria degli insiemi
- in particolare, studiò gli insiemi costituiti da infiniti elementi

Esistono diversi infiniti ?

Cantor si pose il problema del confronto (della cardinalità) di insiemi infiniti.

- La prima scoperta importante fu che l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali ha tanti elementi quanti l'insieme $\mathbb{Q}$,
- infatti le frazioni possono essere messe in relazione con i numeri interi secondo il famoso procedimento diagonale di Cantor

Cantor e l'infinito attuale

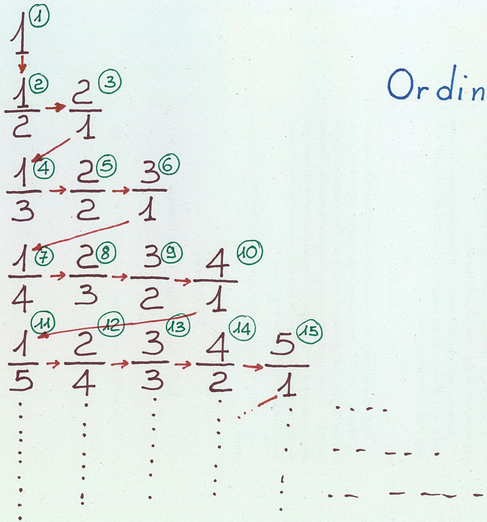
- Cantor si occupò dello studio della teoria degli insiemi
- in particolare, studiò gli insiemi costituiti da infiniti elementi

Esistono diversi infiniti ?

Cantor si pose il problema del confronto (della cardinalità) di insiemi infiniti.

- La prima scoperta importante fu che l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali ha tanti elementi quanti l'insieme $\mathbb{Q}$,
- infatti le frazioni possono essere messe in relazione con i numeri interi secondo il famoso procedimento diagonale di Cantor

$\#\mathbb{Q} = \#\mathbb{N}$



Ordinamento di $\mathbb{Q}$

$\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Q}$

Insiemi numerabili

- Cantor chiamò numerabili tutti gli insiemi (infiniti) che hanno tanti elementi quanti l'insieme dei numeri naturali.
- Indicò l'infinità numerabile con la prima lettera del alfabeto ebraico con indice 0

$$\aleph_0$$

e quindi

$$\#\mathbb{N} = \aleph_0.$$

- $\aleph_0$ è il primo numero cardinale transfinito.

Insiemi numerabili

- Cantor chiamò numerabili tutti gli insiemi (infiniti) che hanno tanti elementi quanti l'insieme dei numeri naturali.
- Indicò l'infinità numerabile con la prima lettera del alfabeto ebraico con indice 0

$$\aleph_0$$

e quindi

$$\#\mathbb{N} = \aleph_0.$$

- $\aleph_0$ è il primo numero cardinale transfinito.

Insiemi numerabili

- Cantor chiamò numerabili tutti gli insiemi (infiniti) che hanno tanti elementi quanti l'insieme dei numeri naturali.
- Indicò l'infinità numerabile con la prima lettera del alfabeto ebraico con indice 0
$$\aleph_0$$
e quindi
$$\#\mathbb{N} = \aleph_0.$$
- $\aleph_0$ è il primo numero cardinale transfinito.

E l'insieme $\mathbb{R}$?

- Cantor, con un metodo davvero ingegnoso, provò che l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ (l'insieme di tutti i numeri con la virgola) era un infinito davvero più grande del infinito numerabile $\aleph_0$ (l'infinito dei numeri interi).
- Cantor provò infatti che i numeri reali tra 1 e 2 non possono essere "contati" $(1, 2, 3, \dots)$ senza lasciare fuori almeno un numero.

E l'insieme $\mathbb{R}$?

- Cantor, con un metodo davvero ingegnoso, provò che l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ (l'insieme di tutti i numeri con la virgola) era un infinito davvero più grande del infinito numerabile $\aleph_0$ (l'infinito dei numeri interi).
- Cantor provò infatti che i numeri reali tra 1 e 2 non possono essere "contati" $(1, 2, 3, \dots)$ senza lasciare fuori almeno un numero.

numerabile $\neq$ continuo

- Supponiamo di poter in qualche modo elencare tutti i numeri (con la virgola) compresi tra 1 e 2.
- Creeremmo allora una lista che potrebbe avere questo aspetto:

1	1,	2	3	4	5	7	8	...
2	1,	5	7	5	6	0	7	...
3	1,	4	6	3	2	1	4	...
4	1,	8	4	6	2	1	6	...
5	1,	5	6	2	1	9	4	...
...	1,	...	...	...	...	...	...	...

- prendiamo il numero 1,27329... e aggiungiamo 1 ad ogni cifra dopo la virgola ($9+1=0$), si ottiene: 1,38430.... E' evidente che questo numero non può stare nel nostro elenco .... ma allora i numeri reali tra 1 e 2 sono "di più" dei numeri naturali.

numerabile $\neq$ continuo

- Supponiamo di poter in qualche modo elencare tutti i numeri (con la virgola) compresi tra 1 e 2.
- Creeremmo allora una lista che potrebbe avere questo aspetto:

1	1,	2	3	4	5	7	8	...
2	1,	5	7	5	6	0	7	...
3	1,	4	6	3	2	1	4	...
4	1,	8	4	6	2	1	6	...
5	1,	5	6	2	1	9	4	...
...	1,	...	...	...	...	...	...	...

- prendiamo il numero 1, 27329... e aggiungiamo 1 ad ogni cifra dopo la virgola ($9+1=0$), si ottiene: 1, 38430.... E' evidente che questo numero non può stare nel nostro elenco .... ma allora i numeri reali tra 1 e 2 sono "di più" dei numeri naturali.

numerabile $\neq$ continuo

- Supponiamo di poter in qualche modo elencare tutti i numeri (con la virgola) compresi tra 1 e 2.
- Creeremmo allora una lista che potrebbe avere questo aspetto:

1	1,	2	3	4	5	7	8	...
2	1,	5	7	5	6	0	7	...
3	1,	4	6	3	2	1	4	...
4	1,	8	4	6	2	1	6	...
5	1,	5	6	2	1	9	4	...
...	1,	...	...	...	...	...	...	...

- prendiamo il numero $1,27329...$ e aggiungiamo 1 ad ogni cifra dopo la virgola ($9+1=0$), si ottiene: $1,38430....$ E' evidente che questo numero non può stare nel nostro elenco .... ma allora i numeri reali tra 1 e 2 sono "di più" dei numeri naturali.

La potenza del continuo

- Cantor chiamò gli insiemi che possono essere messi in corrispondenza uno a uno con l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ insiemi con la potenza del continuo e indicò la cardinalità di questi insiemi con $\mathfrak{c}$.
- Dunque, in simboli:

$$\#\mathbb{R} = \mathfrak{c}.$$

- Cantor andò oltre nel suo studio degli insiemi infiniti...
- trovò infatti un modo per costruire un insieme infinito più grande dato un qualunque insieme infinito...

La potenza del continuo

- Cantor chiamò gli insiemi che possono essere messi in corrispondenza uno a uno con l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ insiemi con la potenza del continuo e indico la cardinalità di questi insiemi con $\mathfrak{c}$.
- Dunque, in simboli:

$$\#\mathbb{R} = \mathfrak{c}.$$

- Cantor andò oltre nel suo studio degli insiemi infiniti...
- trovò infatti un modo per costruire un insieme infinito più grande dato un qualunque insieme infinito...

La potenza del continuo

- Cantor chiamò gli insiemi che possono essere messi in corrispondenza uno a uno con l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ insiemi con la potenza del continuo e indicò la cardinalità di questi insiemi con $\mathfrak{c}$.
- Dunque, in simboli:

$$\#\mathbb{R} = \mathfrak{c}.$$

- Cantor andò oltre nel suo studio degli insiemi infiniti...
- trovò infatti un modo per costruire un insieme infinito più grande dato un qualunque insieme infinito...

Parte 2

Ordinare

Numeri ordinali finiti o contare da 0

Wacław Sierpiński, il grande matematico polacco, aveva un grande interesse per i numeri finiti. Una storia racconta di un suo viaggio nel quale temeva di aver perso una valigia. "No, caro!"disse sua moglie, "sono qui tutte e sei". "Non può essere", ribatté Sierpiński, "le ho contate varie volte, zero, uno, due, tre, quattro, cinque".

- Perchè contare a partire dallo 0? Perchè così si ha un modo per dire quanti elementi ha l'insieme vuoto $\{\ \}$.
- Meglio, lo zero è il primo numero ordinale.
- ora considero il più piccolo numero più grande dei numeri contenuti nell'insieme $\{0\}$: è l'1, cioè è il secondo ordinale.
- il più piccolo numero più grande dei numeri contenuti in $\{0,1\}$ è 2, il terzo ordinale.

In conclusione: il numero ordinale n si definisce come il più piccolo numero intero più grande di tutti i numeri della sequenza $\{0,1,2,3,\dots,n-1\}$.

Numeri ordinali finiti = numeri cardinali finiti

Il numero ordinale finito n è associato all'insieme $\{0,1,2,3,\dots,n-1\}$, che ha cardinalità n

Potrei considerare la sequenza $\{1,0\}$ invece che $\{0,1\}$, ma il numero ordinale associato ad essa rimarebbe 2, cosi come la cardinalità della sequenza $\{1,0\}$.

- Perchè contare a partire dallo 0? Perchè così si ha un modo per dire quanti elementi ha l'insieme vuoto $\{\ \}$.
- Meglio, lo zero è il primo numero ordinale.
- ora considero il più piccolo numero più grande dei numeri contenuti nell'insieme $\{0\}$: è l'1, cioè è il secondo ordinale.
- il più piccolo numero più grande dei numeri contenuti in $\{0,1\}$ è 2, il terzo ordinale.

In conclusione: il numero ordinale n si definisce come il più piccolo numero intero più grande di tutti i numeri della sequenza $\{0,1,2,3,\ldots,n-1\}$.

Numeri ordinali finiti = numeri cardinali finiti

Il numero ordinale finito n è associato all'insieme $\{0,1,2,3,\ldots,n-1\}$, che ha cardinalità n

Potrei considerare la sequenza $\{1,0\}$ invece che $\{0,1\}$, ma il numero ordinale associato ad essa rimarebbe 2, cosi come la cardinalità della sequenza $\{1,0\}$.

- Perchè contare a partire dallo 0? Perchè così si ha un modo per dire quanti elementi ha l'insieme vuoto $\{\ \}$.
- Meglio, lo zero è il primo numero ordinale.
- ora considero il più piccolo numero più grande dei numeri contenuti nell'insieme $\{0\}$: è l'1, cioè è il secondo ordinale.
- il più piccolo numero più grande dei numeri contenuti in $\{0,1\}$ è 2, il terzo ordinale.

In conclusione: il numero ordinale n si definisce come il più piccolo numero intero più grande di tutti i numeri della sequenza $\{0,1,2,3,\dots,n-1\}$.

Numeri ordinali finiti = numeri cardinali finiti

Il numero ordinale finito n è associato all'insieme $\{0,1,2,3,\dots,n-1\}$, che ha cardinalità n

Potrei considerare la sequenza $\{1,0\}$ invece che $\{0,1\}$, ma il numero ordinale associato ad essa rimarebbe 2, cosi come la cardinalità della sequenza $\{1,0\}$.

- Perchè contare a partire dallo 0? Perchè così si ha un modo per dire quanti elementi ha l'insieme vuoto $\{\ \}$.
- Meglio, lo zero è il primo numero ordinale.
- ora considero il più piccolo numero più grande dei numeri contenuti nell'insieme $\{0\}$: è l'1, cioè è il secondo ordinale.
- il più piccolo numero più grande dei numeri contenuti in $\{0,1\}$ è 2, il terzo ordinale.

In conclusione: il numero ordinale n si definisce come il più piccolo numero intero più grande di tutti i numeri della sequenza $\{0,1,2,3,\ldots,n-1\}$.

Numeri ordinali finiti = numeri cardinali finiti

Il numero ordinale finito n è associato all'insieme $\{0,1,2,3,\ldots,n-1\}$, che ha cardinalità n

Potrei considerare la sequenza $\{1,0\}$ invece che $\{0,1\}$, ma il numero ordinale associato ad essa rimarebbe 2, cosi come la cardinalità della sequenza $\{1,0\}$.

- Perchè contare a partire dallo 0? Perchè così si ha un modo per dire quanti elementi ha l'insieme vuoto $\{\ \}$.
- Meglio, lo zero è il primo numero ordinale.
- ora considero il più piccolo numero più grande dei numeri contenuti nell'insieme $\{0\}$: è l'1, cioè è il secondo ordinale.
- il più piccolo numero più grande dei numeri contenuti in $\{0,1\}$ è 2, il terzo ordinale.

In conclusione: il numero ordinale n si definisce come il più piccolo numero intero più grande di tutti i numeri della sequenza $\{0,1,2,3,\ldots,n-1\}$.

Numeri ordinali finiti = numeri cardinali finiti

Il numero ordinale finito n è associato all'insieme $\{0,1,2,3,\ldots,n-1\}$, che ha cardinalità n

Potrei considerare la sequenza $\{1,0\}$ invece che $\{0,1\}$, ma il numero ordinale associato ad essa rimarebbe 2, cosi come la cardinalità della sequenza $\{1,0\}$.

Numeri ordinali transfiniti

Prendiamo ora la sequenza di tutti i numeri interi

$$\{1, 2, 3 \ldots, n, \ldots\}.$$

il primo ordinale transfinito: ω

- Qual'è il più piccolo numero più grande di tutti i numeri interi?
- Cantor lo chiamò ω ed è il primo ordinale transfinito.

Verrebbe naturale dire che ω corrisponde al primo cardinale transfinito $\aleph_0$. Tutto a posto allora?

Numeri ordinali transfiniti

Prendiamo ora la sequenza di tutti i numeri interi

$$\{1, 2, 3 \ldots, n, \ldots\}.$$

il primo ordinale transfinito: ω

- Qual'è il più piccolo numero più grande di tutti i numeri interi?
- Cantor lo chiamò ω ed è il primo ordinale transfinito.

Verrebbe naturale dire che ω corrisponde al primo cardinale transfinito $\aleph_0$. Tutto a posto allora?

Numeri ordinali transfiniti

Prendiamo ora la sequenza di tutti i numeri interi

$$\{1, 2, 3 \dots, n, \dots\}.$$

il primo ordinale transfinito: ω

- Qual'è il più piccolo numero più grande di tutti i numeri interi?
- Cantor lo chiamò ω ed è il primo ordinale transfinito.

Verrebbe naturale dire che ω corrisponde al primo cardinale transfinito $\aleph_0$.

Tutto a posto allora?

Numeri ordinali transfiniti

Prendiamo ora la sequenza di tutti i numeri interi

$$\{1, 2, 3 \ldots, n, \ldots\}.$$

il primo ordinale transfinito: ω

- Qual'è il più piccolo numero più grande di tutti i numeri interi?
- Cantor lo chiamò ω ed è il primo ordinale transfinito.

Verrebbe naturale dire che ω corrisponde al primo cardinale transfinito $\aleph_0$. Tutto a posto allora?

Negli ordinali infiniti conta l'ordine

Pensiamo alla sequenza di tutti i numeri interi, ma scriviamola mettendo prima tutti i pari, poi tutti i dispari

$$0 \quad 2 \quad 4 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

Adesso proviamo a contare in ordine gli elementi di questa sequenza con gli ordinali che conosciamo

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 2 & 4 & \dots & \dots & \dots & 1 & 3 & 5 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & \dots & \dots & \omega & \omega+1 & \omega+2 & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Quale sarà l'ordinale associato a questo sequenza? $\omega \times 2$.
Ma il numero cardinale associato a questa sequenza (la sua numerosità) resta $\aleph_0$.

Negli ordinali infiniti conta l'ordine

Pensiamo alla sequenza di tutti i numeri interi, ma scriviamola mettendo prima tutti i pari, poi tutti i dispari

$$0 \quad 2 \quad 4 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

Adesso proviamo a contare in ordine gli elementi di questa sequenza con gli ordinali che conosciamo

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 2 & 4 & \dots & \dots & \dots & 1 & 3 & 5 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & \dots & \dots & \omega & \omega+1 & \omega+2 & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Quale sarà l'ordinale associato a questo sequenza? $\omega \times 2$.
Ma il numero cardinale associato a questa sequenza (la sua numerosità) resta $\aleph_0$.

Negli ordinali infiniti conta l'ordine

Pensiamo alla sequenza di tutti i numeri interi, ma scriviamola mettendo prima tutti i pari, poi tutti i dispari

$$0 \quad 2 \quad 4 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

Adesso proviamo a contare in ordine gli elementi di questa sequenza con gli ordinali che conosciamo

0	2	4	...	...	...	1	3	5	...	...	...
0	1	2	...	...	...	ω	$\omega+1$	$\omega+2$	...	...	...

Quale sarà l'ordinale associato a questo sequenza? $\omega \times 2$.

Ma il numero cardinale associato a questa sequenza (la sua numerosità) resta $\aleph_0$.

Negli ordinali infiniti conta l'ordine

Pensiamo alla sequenza di tutti i numeri interi, ma scriviamola mettendo prima tutti i pari, poi tutti i dispari

$$0 \quad 2 \quad 4 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

Adesso proviamo a contare in ordine gli elementi di questa sequenza con gli ordinali che conosciamo

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 2 & 4 & \dots & \dots & \dots & 1 & 3 & 5 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & \dots & \dots & \omega & \omega+1 & \omega+2 & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Quale sarà l'ordinale associato a questo sequenza? $\omega \times 2$.
Ma il numero cardinale associato a questa sequenza (la sua numerosità) resta $\aleph_0$.

Negli ordinali infiniti conta l'ordine

Proviamo ora a disporre i numeri naturali in un modo diverso: li dividiamo in base a quale sia la potenza di 2 con esponente massimo che li divide esattamente. Cioè, nella prima colonna i numeri divisibili solo $2^0 = 1$, nella seconda i numeri divisibili solo 2^1, e così via ...:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 4 & 8 & 16 & \dots \\
3 & 6 & 12 & 24 & 48 & \dots \\
5 & 10 & 20 & 40 & 80 & \dots \\
7 & 14 & 28 & 56 & 112 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

E adesso proviamo a contarli con gli ordinali.

1 0	2 ω	4 $\omega \times 2$	8 $\omega \times 3$	16 $\omega \times 4$	...
3 1	6 $\omega + 1$	12 $\omega \times 2 + 1$	24 $\omega \times 3 + 1$	48 $\omega \times 4 + 1$	...
5 2	10 $\omega + 2$	20 $\omega \times 2 + 2$	40 $\omega \times 3 + 2$	80 $\omega \times 4 + 2$	...
7 3	14 $\omega + 3$	28 $\omega \times 2 + 3$	56 $\omega \times 3 + 3$	112 $\omega \times 4 + 3$	...
...	...	...	...	...	...

A questa sequenza viene naturale associare il numero ordinale transfinito

$$\omega \times \omega = \omega^2.$$

Di nuovo, però, il numero cardinale transfinito associato a questa sequenza è

$$\aleph_0.$$

Sempre avanti

Procedendo in questo modo Cantor creò infiniti numeri ordinali transfiniti

$$\omega, \omega+1, \ldots, \omega \times 2, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^\omega \ldots.$$

Ad ognuno di essi è associato il numero cardinale transfinito $\aleph_0$ (cioè, le sequenze ad essi associate sono numerabili)

Quanti sono gli ordinali finiti o numerabili?

Cantor dimostrò che considerando tutti gli ordinali finiti e numerabili

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \ldots, \omega \times 2, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^\omega \ldots.$$

si aveva una sequenza con una numerosità di elementi più grande di $\aleph_0$. Chiamò questo nuovo numero cardinale transfinito $\aleph_1$.

Procedendo in questo modo Cantor creò infiniti numeri ordinali transfiniti

$$\omega, \omega + 1, \ldots, \omega \times 2, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^\omega \ldots.$$

Ad ognuno di essi è associato il numero cardinale transfinito $\aleph_0$ (cioè, le sequenze ad essi associate sono numerabili)

Quanti sono gli ordinali finiti o numerabili?

Cantor dimostrò che considerando tutti gli ordinali finiti e numerabili

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots, \omega \times 2, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^\omega \ldots.$$

si aveva una sequenza con una numerosità di elementi più grande di $\aleph_0$. Chiamò questo nuovo numero cardinale transfinito $\aleph_1$.

Infiniti più che numerabili

- Ma noi avevamo già incontrato un infinito più grande del numerabile $\mathfrak{c}$, che indicava quanti fossero i numeri reali (potenza del continuo).
- Cantor congetturò che valesse:

Ipotesi del Continuo

$$\aleph_1 = \mathfrak{c}$$

- Cantor non riuscì mai a dimostrare questa congettura.

Infiniti più che numerabili

- Ma noi avevamo già incontrato un infinito più grande del numerabile $\mathfrak{c}$, che indicava quanti fossero i numeri reali (potenza del continuo).
- Cantor congetturò che valesse:

Ipotesi del Continuo

$$\aleph_1 = \mathfrak{c}$$

- Cantor non riuscì mai a dimostrare questa congettura.

Infiniti più che numerabili

- Ma noi avevamo già incontrato un infinito più grande del numerabile $\mathfrak{c}$, che indicava quanti fossero i numeri reali (potenza del continuo).
- Cantor congetturò che valesse:

Ipotesi del Continuo

$$\aleph_1 = \mathfrak{c}$$

- Cantor non riuscì mai a dimostrare questa congettura.

Né vero né falso

- Nel 1940 il logico Kurt Gödel provò che l'ipotesi del continuo non può essere *confutata* a partire dagli altri assiomi della matematica.
- Nel 1963 il matematico Paul Cohen dimostrò che l'ipotesi del continuo non può essere neppure *dimostrata* a partire dagli assiomi della matematica!

È curioso osservare che al cuore del risultato di Gödel si annida ancora l'infinito, ma un infinito diverso, l'infinito della ricorsività. Qualcosa come far dire alla matematica stessa: "la matematica mente"...

Né vero né falso

- Nel 1940 il logico Kurt Gödel provò che l'ipotesi del continuo non può essere *confutata* a partire dagli altri assiomi della matematica.
- Nel 1963 il matematico Paul Cohen dimostrò che l'ipotesi del continuo non può essere neppure *dimostrata* a partire dagli assiomi della matematica!

È curioso osservare che al cuore del risultato di Gödel si annida ancora l'infinito, ma un infinito diverso, l'infinito della ricorsività. Qualcosa come far dire alla matematica stessa: "la matematica mente"...

Né vero né falso

- Nel 1940 il logico Kurt Gödel provò che l'ipotesi del continuo non può essere *confutata* a partire dagli altri assiomi della matematica.
- Nel 1963 il matematico Paul Cohen dimostrò che l'ipotesi del continuo non può essere neppure *dimostrata* a partire dagli assiomi della matematica!

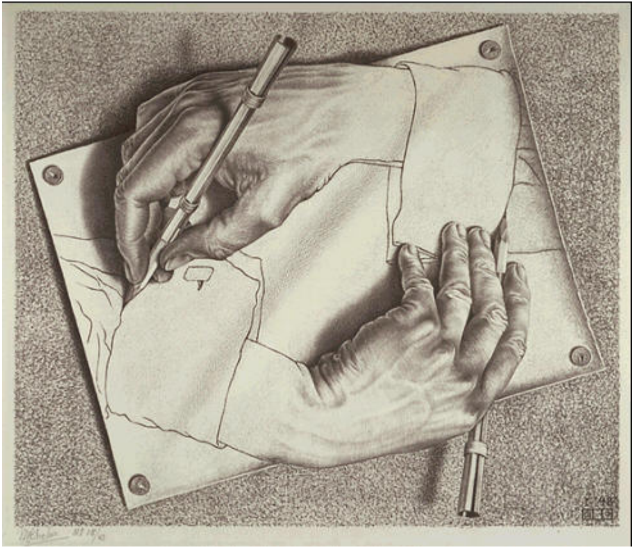
È curioso osservare che al cuore del risultato di Gödel si annida ancora l'infinito, ma un infinito diverso, l'infinito della ricorsività. Qualcosa come far dire alla matematica stessa: "la matematica mente"...

Né vero né falso

- Nel 1940 il logico Kurt Gödel provò che l'ipotesi del continuo non può essere *confutata* a partire dagli altri assiomi della matematica.
- Nel 1963 il matematico Paul Cohen dimostrò che l'ipotesi del continuo non può essere neppure *dimostrata* a partire dagli assiomi della matematica!

È curioso osservare che al cuore del risultato di Gödel si annida ancora l'infinito, ma un infinito diverso, l'infinito della ricorsività. Qualcosa come far dire alla matematica stessa: "la matematica mente"...

Escher



Caso mai aveste voglia di saperne di più

- J.H. Conway & R.K. Guy; Il libro dei numeri, Hoepli (1999);
- A. Deledicq & F. Casiro; Addomesticare l'infinito. Edizioni Kangourou Italia (2005);
- T. Gowers; Matematica, Einaudi, (2004);
- G. Lolli; *Da Euclide a Gödel.* Il Mulino (2004);
- P. Odifreddi; La Matematica del '900. Einaudi (2000);
- P. Zellini; Breve storia dell'infinito. Adelphi (1980)

e per finire due fumetti:

- D. Osenda; Ultima lezione a Gottinga. 001 Edizioni (2009).
- A. Doxiadis & C.H. Papadimitriou, Logicomix, Guanda (2010)

Caso mai aveste voglia di saperne di più

- J.H. Conway & R.K. Guy; Il libro dei numeri, Hoepli (1999);
- A. Deledicq & F. Casiro; Addomesticare l'infinito. Edizioni Kangourou Italia (2005);
- T. Gowers; Matematica, Einaudi, (2004);
- G. Lolli; *Da Euclide a Gödel.* Il Mulino (2004);
- P. Odifreddi; La Matematica del '900. Einaudi (2000);
- P. Zellini; Breve storia dell'infinito. Adelphi (1980)

e per finire due fumetti:

- D. Osenda; Ultima lezione a Gottinga. 001 Edizioni (2009).
- A. Doxiadis & C.H. Papadimitriou, Logicomix, Guanda (2010)

Caso mai aveste voglia di saperne di più

- J.H. Conway & R.K. Guy; Il libro dei numeri, Hoepli (1999);
- A. Deledicq & F. Casiro; Addomesticare l'infinito. Edizioni Kangourou Italia (2005);
- T. Gowers; Matematica, Einaudi, (2004);
- G. Lolli; *Da Euclide a Gödel.* Il Mulino (2004);
- P. Odifreddi; La Matematica del '900. Einaudi (2000);
- P. Zellini; Breve storia dell'infinito. Adelphi (1980)

e per finire due fumetti:

- D. Osenda; Ultima lezione a Gottinga. 001 Edizioni (2009).
- A. Doxiadis & C.H. Papadimitriou, Logicomix, Guanda (2010)

Caso mai aveste voglia di saperne di più

- J.H. Conway & R.K. Guy; Il libro dei numeri, Hoepli (1999);
- A. Deledicq & F. Casiro; Addomesticare l'infinito. Edizioni Kangourou Italia (2005);
- T. Gowers; Matematica, Einaudi, (2004);
- G. Lolli; *Da Euclide a Gödel.* Il Mulino (2004);
- P. Odifreddi; La Matematica del '900. Einaudi (2000);
- P. Zellini; Breve storia dell'infinito. Adelphi (1980)

e per finire due fumetti:

- D. Osenda; Ultima lezione a Gottinga. 001 Edizioni (2009).
- A. Doxiadis & C.H. Papadimitriou, Logicomix, Guanda (2010)