Aritmetica per la Costituzione

Marco LiCalzi

Venice School of Management
Università "Ca' Foscari" di Venezia

Incontro per il $(\pi + 2)$-day

Milano, 16 marzo 2026

Aritmetica nella Costituzione?

Art. 57

Il Senato della Repubblica è eletto a base regionale, salvi i seggi assegnati alla circoscrizione Estero.

Il numero dei senatori elettivi è di duecento, quattro dei quali eletti nella circoscrizione Estero. Nessuna Regione o Provincia autonoma può avere un numero di senatori inferiore a tre; il Molise ne ha due, la Valle d'Aosta uno.

La ripartizione dei seggi tra le Regioni o le Province autonome, previa applicazione delle disposizioni del precedente comma, si effettua in proporzione alla loro popolazione, quale risulta dall'ultimo censimento generale, sulla base dei quozienti interi e dei più alti resti.

Art. 56

La Camera dei deputati è eletta [. . .]

La ripartizione dei seggi tra le circoscrizioni [. . .] sulla base dei quozienti interi e dei più alti resti.

Aritmetica nella Costituzione?

$\boxed{\text{Art. 57}}$

Il Senato della Repubblica è eletto a base regionale, salvi i seggi assegnati alla circoscrizione Estero.

Il numero dei senatori elettivi è di duecento, quattro dei quali eletti nella circoscrizione Estero. Nessuna Regione o Provincia autonoma può avere un numero di senatori inferiore a tre; il Molise ne ha due, la Valle d'Aosta uno.

La ripartizione dei seggi tra le Regioni o le Province autonome, previa applicazione delle disposizioni del precedente comma, si effettua in proporzione alla loro popolazione, quale risulta dall'ultimo censimento generale, sulla base dei quozienti interi e dei più alti resti.

$\boxed{\text{Art. 56}}$

La Camera dei deputati è eletta [. . .]

La ripartizione dei seggi tra le circoscrizioni [. . .] *sulla base dei quozienti interi e dei più alti resti.*

Aritmetica nella Costituzione?

Art. 57

Il Senato della Repubblica è eletto a base regionale, salvi i seggi assegnati alla circoscrizione Estero.

Il numero dei senatori elettivi è di duecento, quattro dei quali eletti nella circoscrizione Estero. Nessuna Regione o Provincia autonoma può avere un numero di senatori inferiore a tre; il Molise ne ha due, la Valle d'Aosta uno.

La ripartizione dei seggi tra le Regioni o le Province autonome, previa applicazione delle disposizioni del precedente comma, si effettua in proporzione alla loro popolazione, quale risulta dall'ultimo censimento generale, sulla base dei quozienti interi e dei più alti resti.

Art. 56

La Camera dei deputati è eletta [...]

La ripartizione dei seggi tra le circoscrizioni [...] *sulla base dei quozienti interi e dei più alti resti.*

Suddivisione di beni indivisibili

Dobbiamo distribuire 21 computer identici fra le tre scuole del plesso ABC in proporzione al numero degli studenti.

Scuola	Studenti	% Studenti
A	727	67.8%
B	123	11.5%
C	222	20.7%
Tot.	1072	100%

La soluzione proporzionale assegna ad ogni scuola una quota percentuale di computer pari alla percentuale degli studenti.

Problema: ogni computer va assegnato ad una sola scuola.
(Non sono ammesse le frazioni di computer.)

Se diamo 15 computer ad A e 2 a B, ci saranno proteste.

Se diamo 14 computer ad A e 3 a B, ci saranno proteste.

Suddivisione di beni indivisibili

Dobbiamo distribuire 21 computer identici fra le tre scuole del plesso ABC in proporzione al numero degli studenti.

Scuola	Studenti	% Studenti	Quota
A	727	67.8%	14.24
B	123	11.5%	2.41
C	222	20.7%	4.35
Tot.	1072	100%	21

La soluzione proporzionale assegna ad ogni scuola una quota percentuale di computer pari alla percentuale degli studenti.

Problema: ogni computer va assegnato ad una sola scuola.
(Non sono ammesse le frazioni di computer.)

Se diamo 15 computer ad A e 2 a B, ci saranno proteste.

Se diamo 14 computer ad A e 3 a B, ci saranno proteste.

Suddivisione di beni indivisibili

Dobbiamo distribuire 21 computer identici fra le tre scuole del plesso ABC in proporzione al numero degli studenti.

Scuola	Studenti	% Studenti	Quota	Proposta
A	727	67.8%	14.24	15
B	123	11.5%	2.41	2
C	222	20.7%	4.35	4
Tot.	1072	100%	21	21

La soluzione proporzionale assegna ad ogni scuola una quota percentuale di computer pari alla percentuale degli studenti.

Problema: ogni computer va assegnato ad una sola scuola.
(Non sono ammesse le frazioni di computer.)

Se diamo 15 computer ad A e 2 a B, ci saranno proteste.

Se diamo 14 computer ad A e 3 a B, ci saranno proteste.

Suddivisione di beni indivisibili

Dobbiamo distribuire 21 computer identici fra le tre scuole del plesso ABC in proporzione al numero degli studenti.

Scuola	Studenti	% Studenti	Quota	Proposta
A	727	67.8%	14.24	14
B	123	11.5%	2.41	3
C	222	20.7%	4.35	4
Tot.	1072	100%	21	21

La soluzione proporzionale assegna ad ogni scuola una quota percentuale di computer pari alla percentuale degli studenti.

Problema: ogni computer va assegnato ad una sola scuola.
(Non sono ammesse le frazioni di computer.)

Se diamo 15 computer ad A e 2 a B, ci saranno proteste.

Se diamo 14 computer ad A e 3 a B, ci saranno proteste.

Il problema dell'equa suddivisione

Dobbiamo suddividere un insieme di oggetti identici e indivisibili in modo proporzionale:

- i computers fra le scuole di un plesso in proporzione al numero degli studenti;
- la collezione di biglie del nonno fra gli eredi in proporzione alle quote ereditarie;
- i seggi del Senato fra Regioni e Province *"in proporzione alla loro popolazione"*;
- i rappresentanti di ciascuno stato in proporzione alle rispettive popolazioni (sistema federale).

Non esiste un metodo "perfetto" per suddividere beni indivisibili.

A meno che le quote proporzionali non siano tutte intere, dovremo approssimare: qualcuno avrà più della sua quota, qualcuno meno.

Cerchiamo un metodo di approssimazione equo.

Il problema dell'equa suddivisione

Dobbiamo suddividere un insieme di oggetti identici e indivisibili in modo proporzionale:

- i computers fra le scuole di un plesso in proporzione al numero degli studenti;
- la collezione di biglie del nonno fra gli eredi in proporzione alle quote ereditarie;
- i seggi del Senato fra Regioni e Province *"in proporzione alla loro popolazione"*;
- i rappresentanti di ciascuno stato in proporzione alle rispettive popolazioni (sistema federale).

Non esiste un metodo "perfetto" per suddividere beni indivisibili.

A meno che le quote proporzionali non siano tutte intere, dovremo approssimare: qualcuno avrà più della sua quota, qualcuno meno.

Cerchiamo un metodo di approssimazione equo.

Il problema dell'equa suddivisione

Dobbiamo suddividere un insieme di oggetti identici e indivisibili in modo proporzionale:

- i computers fra le scuole di un plesso in proporzione al numero degli studenti;
- la collezione di biglie del nonno fra gli eredi in proporzione alle quote ereditarie;
- i seggi del Senato fra Regioni e Province *"in proporzione alla loro popolazione"*;
- i rappresentanti di ciascuno stato in proporzione alle rispettive popolazioni (sistema federale).

Non esiste un metodo "perfetto" per suddividere beni indivisibili.

A meno che le quote proporzionali non siano tutte intere, dovremo approssimare: qualcuno avrà più della sua quota, qualcuno meno.

Cerchiamo un metodo di approssimazione equo.

Il problema dell'equa suddivisione

Dobbiamo suddividere un insieme di oggetti identici e indivisibili in modo proporzionale:

- i computers fra le scuole di un plesso in proporzione al numero degli studenti;
- la collezione di biglie del nonno fra gli eredi in proporzione alle quote ereditarie;
- i seggi del Senato fra Regioni e Province *"in proporzione alla loro popolazione"*;
- i rappresentanti di ciascuno stato in proporzione alle rispettive popolazioni (sistema federale).

Non esiste un metodo "perfetto" per suddividere beni indivisibili.

A meno che le quote proporzionali non siano tutte intere, dovremo approssimare: qualcuno avrà più della sua quota, qualcuno meno.

Cerchiamo un metodo di approssimazione equo.

Il problema dell'equa suddivisione

Dobbiamo suddividere un insieme di oggetti identici e indivisibili in modo proporzionale:

- i computers fra le scuole di un plesso in proporzione al numero degli studenti;
- la collezione di biglie del nonno fra gli eredi in proporzione alle quote ereditarie;
- i seggi del Senato fra Regioni e Province *"in proporzione alla loro popolazione"*;
- i rappresentanti di ciascuno stato in proporzione alle rispettive popolazioni (sistema federale).

Non esiste un metodo "perfetto" per suddividere beni indivisibili.

A meno che le quote proporzionali non siano tutte intere, dovremo approssimare: qualcuno avrà più della sua quota, qualcuno meno.

Cerchiamo un metodo di approssimazione equo.

Il problema dell'equa suddivisione

Dobbiamo suddividere un insieme di oggetti identici e indivisibili in modo proporzionale:

- i computers fra le scuole di un plesso in proporzione al numero degli studenti;
- la collezione di biglie del nonno fra gli eredi in proporzione alle quote ereditarie;
- i seggi del Senato fra Regioni e Province *"in proporzione alla loro popolazione"*;
- i rappresentanti di ciascuno stato in proporzione alle rispettive popolazioni (sistema federale).

Non esiste un metodo "perfetto" per suddividere beni indivisibili.

A meno che le quote proporzionali non siano tutte intere, dovremo approssimare: qualcuno avrà più della sua quota, qualcuno meno.

Cerchiamo un metodo di approssimazione equo.

Formulazione del problema (sistema federale)

Dati n seggi, vogliamo assegnare a ciascuno stato un numero intero s_i di seggi (approssimativamente) proporzionale alla sua popolazione p_i.

Stato	Popolazione	Quota
A	7.270.000	14.24
B	1.230.000	2.41
C	2.220.000	4.35
Tot.	10.720.000	21

Questo problema ha natura costituzionale, perché la sua soluzione decide la composizione del Parlamento.

L'art. 1 della Costituzione degli Stati Uniti (1789) stabilisce:
"*I rappresentanti* [...] *saranno ripartiti fra i diversi Stati* [...] *secondo i loro numeri*, determinati sommando al numero delle persone libere [...] i tre quinti di tutte le altre persone."

Formulazione del problema (sistema federale)

Dati n seggi, vogliamo assegnare a ciascuno stato un numero intero s_i di seggi (approssimativamente) proporzionale alla sua popolazione p_i.

Stato	Popolazione	Quota
A	7.270.000	14.24
B	1.230.000	2.41
C	2.220.000	4.35
Tot.	10.720.000	21

Questo problema ha natura costituzionale, perché la sua soluzione decide la composizione del Parlamento.

L'art. 1 della Costituzione degli Stati Uniti (1789) stabilisce:

"*I rappresentanti* [...] *saranno ripartiti fra i diversi Stati* [...] *secondo i loro numeri*, determinati sommando al numero delle persone libere [...] i tre quinti di tutte le altre persone."

Il metodo di Hamilton (1791)

Stato	Pop.	Quota
A	727	14.24
B	123	2.41
C	222	4.35
Tot.	1072	21

Il metodo di Hamilton (1791)

Stato	Pop.	Quota
A	727	14.24
B	123	2.41
C	222	4.35
Tot.	1072	21

Diamo a ciascuno stato la parte intera della sua quota.

Il metodo di Hamilton (1791)

Stato	Pop.	Quota		Seggi
A	727	14.24		14
B	123	2.41		2
C	222	4.35		3
Tot.	1072	21		20

Diamo a ciascuno stato la parte intera della sua quota.

Il metodo di Hamilton (1791)

Stato	Pop.	Quota	Seggi
A	727	14.24	14
B	123	2.41	2
C	222	4.35	3
Tot.	1072	21	20

Diamo a ciascuno stato la parte intera della sua quota.

Resta da attribuire ancora un seggio. Guardiamo i resti.

Il metodo di Hamilton (1791)

Stato	Pop.	Quota	Seggi	Resto
A	727	14.24	14	0.24
B	123	2.41	2	0.41
C	222	4.35	3	0.35
Tot.	1072	21	20	1

Diamo a ciascuno stato la parte intera della sua quota.

Resta da attribuire ancora un seggio. Guardiamo i resti.

Il metodo di Hamilton (1791)

Stato	Pop.	Quota	Seggi	Resto
A	727	14.24	14	0.24
B	123	2.41	2	0.41
C	222	4.35	3	0.35
Tot.	1072	21	20	1

Diamo a ciascuno stato la parte intera della sua quota.

Resta da attribuire ancora un seggio. Guardiamo i resti.

Diamo il seggio residuo allo stato con il resto più alto.

Il metodo di Hamilton (1791)

Stato	Pop.	Quota	Seggi	Resto
A	727	14.24	14	0.24
B	123	2.41	2	0.41*
C	222	4.35	3	0.35
Tot.	1072	21	20	1

Diamo a ciascuno stato la parte intera della sua quota.

Resta da attribuire ancora un seggio. Guardiamo i resti.

Diamo il seggio residuo allo stato con il resto più alto.

Il metodo di Hamilton (1791)

Stato	Pop.	Quota	Seggi	Resto	Seggi
A	727	14.24	14	0.24	0
B	123	2.41	2	0.41*	1
C	222	4.35	3	0.35	0
Tot.	1072	21	20	1	1

Diamo a ciascuno stato la parte intera della sua quota.

Resta da attribuire ancora un seggio. Guardiamo i resti.

Diamo il seggio residuo allo stato con il resto più alto.

Il metodo di Hamilton (1791)

Stato	Pop.	Quota	Seggi	Resto	Seggi
A	727	14.24	14	0.24	0
B	123	2.41	2	0.41*	1
C	222	4.35	3	0.35	0
Tot.	1072	21	20	1	1

Diamo a ciascuno stato la parte intera della sua quota.

Resta da attribuire ancora un seggio. Guardiamo i resti.

Diamo il seggio residuo allo stato con il resto più alto.

Metodo di Hamilton:

Ogni stato riceve la parte intera della sua quota.
I seggi residui sono assegnati agli stati con i resti più alti.

Politica e aritmetica

Il metodo di Hamilton è approvato dal Congresso.

Il presidente Washington pone il veto presidenziale.
(È la prima volta che il presidente usa questo potere.)

La legge non promulgata ritorna al Congresso.
E' approvato un altro metodo, proposto da Jefferson.

Il presidente non appone il veto.
Il nuovo metodo diventa legge, restando in vigore fino al 1840.

Hamilton era Segretario al Tesoro e federalista.
Jefferson era Segretario di Stato e democratico-repubblicano.

Il nuovo metodo distribuisce i seggi fra le 13 colonie fondatrici diversamente dal metodo di Hamilton.

In particolare, favorisce gli stati grandi: la Virginia passa dal 15.8% di seggi (con Hamilton) al 18.1% (con Jefferson).

Jefferson e Washington erano nati in Virginia.
Il primo ne era stato governatore.

Politica e aritmetica

Il metodo di Hamilton è approvato dal Congresso.

Il presidente Washington pone il veto presidenziale.
(È la prima volta che il presidente usa questo potere.)

La legge non promulgata ritorna al Congresso.
E' approvato un altro metodo, proposto da Jefferson.

Il presidente non appone il veto.
Il nuovo metodo diventa legge, restando in vigore fino al 1840.

Hamilton era Segretario al Tesoro e federalista.
Jefferson era Segretario di Stato e democratico-repubblicano.

Il nuovo metodo distribuisce i seggi fra le 13 colonie fondatrici diversamente dal metodo di Hamilton.

In particolare, favorisce gli stati grandi: la Virginia passa dal 15.8% di seggi (con Hamilton) al 18.1% (con Jefferson).

Jefferson e Washington erano nati in Virginia.
Il primo ne era stato governatore.

Politica e aritmetica

Il metodo di Hamilton è approvato dal Congresso.

Il presidente Washington pone il veto presidenziale.
(È la prima volta che il presidente usa questo potere.)

La legge non promulgata ritorna al Congresso.
E' approvato un altro metodo, proposto da Jefferson.

Il presidente non appone il veto.
Il nuovo metodo diventa legge, restando in vigore fino al 1840.

Hamilton era Segretario al Tesoro e federalista.
Jefferson era Segretario di Stato e democratico-repubblicano.

Il nuovo metodo distribuisce i seggi fra le 13 colonie fondatrici diversamente dal metodo di Hamilton.

In particolare, favorisce gli stati grandi: la Virginia passa dal 15.8% di seggi (con Hamilton) al 18.1% (con Jefferson).

Jefferson e Washington erano nati in Virginia.
Il primo ne era stato governatore.

Politica e aritmetica

Il metodo di Hamilton è approvato dal Congresso.

Il presidente Washington pone il veto presidenziale.
(È la prima volta che il presidente usa questo potere.)

La legge non promulgata ritorna al Congresso.
E' approvato un altro metodo, proposto da Jefferson.

Il presidente non appone il veto.
Il nuovo metodo diventa legge, restando in vigore fino al 1840.

Hamilton era Segretario al Tesoro e federalista.
Jefferson era Segretario di Stato e democratico-repubblicano.

Il nuovo metodo distribuisce i seggi fra le 13 colonie fondatrici diversamente dal metodo di Hamilton.

In particolare, favorisce gli stati grandi: la Virginia passa dal 15.8% di seggi (con Hamilton) al 18.1% (con Jefferson).

Jefferson e Washington erano nati in Virginia.
Il primo ne era stato governatore.

Politica e aritmetica

Il metodo di Hamilton è approvato dal Congresso.

Il presidente Washington pone il veto presidenziale.
(È la prima volta che il presidente usa questo potere.)

La legge non promulgata ritorna al Congresso.
E' approvato un altro metodo, proposto da Jefferson.

Il presidente non appone il veto.
Il nuovo metodo diventa legge, restando in vigore fino al 1840.

Hamilton era Segretario al Tesoro e federalista.
Jefferson era Segretario di Stato e democratico-repubblicano.

Il nuovo metodo distribuisce i seggi fra le 13 colonie fondatrici diversamente dal metodo di Hamilton.

In particolare, favorisce gli stati grandi: la Virginia passa dal 15.8% di seggi (con Hamilton) al 18.1% (con Jefferson).

Jefferson e Washington erano nati in Virginia.
Il primo ne era stato governatore.

Politica e aritmetica

Il metodo di Hamilton è approvato dal Congresso.

Il presidente Washington pone il veto presidenziale.
(È la prima volta che il presidente usa questo potere.)

La legge non promulgata ritorna al Congresso.
E' approvato un altro metodo, proposto da Jefferson.

Il presidente non appone il veto.
Il nuovo metodo diventa legge, restando in vigore fino al 1840.

Hamilton era Segretario al Tesoro e federalista.
Jefferson era Segretario di Stato e democratico-repubblicano.

Il nuovo metodo distribuisce i seggi fra le 13 colonie fondatrici diversamente dal metodo di Hamilton.

In particolare, favorisce gli stati grandi: la Virginia passa dal 15.8% di seggi (con Hamilton) al 18.1% (con Jefferson).

Jefferson e Washington erano nati in Virginia.
Il primo ne era stato governatore.

Politica e aritmetica

Il metodo di Hamilton è approvato dal Congresso.

Il presidente Washington pone il veto presidenziale.
(È la prima volta che il presidente usa questo potere.)

La legge non promulgata ritorna al Congresso.
E' approvato un altro metodo, proposto da Jefferson.

Il presidente non appone il veto.
Il nuovo metodo diventa legge, restando in vigore fino al 1840.

Hamilton era Segretario al Tesoro e federalista.
Jefferson era Segretario di Stato e democratico-repubblicano.

Il nuovo metodo distribuisce i seggi fra le 13 colonie fondatrici diversamente dal metodo di Hamilton.

In particolare, favorisce gli stati grandi: la Virginia passa dal 15.8% di seggi (con Hamilton) al 18.1% (con Jefferson).

Jefferson e Washington erano nati in Virginia.
Il primo ne era stato governatore.

Politica e aritmetica

Il metodo di Hamilton è approvato dal Congresso.

Il presidente Washington pone il veto presidenziale.
(È la prima volta che il presidente usa questo potere.)

La legge non promulgata ritorna al Congresso.
E' approvato un altro metodo, proposto da Jefferson.

Il presidente non appone il veto.
Il nuovo metodo diventa legge, restando in vigore fino al 1840.

Hamilton era Segretario al Tesoro e federalista.
Jefferson era Segretario di Stato e democratico-repubblicano.

Il nuovo metodo distribuisce i seggi fra le 13 colonie fondatrici diversamente dal metodo di Hamilton.

In particolare, favorisce gli stati grandi: la Virginia passa dal 15.8% di seggi (con Hamilton) al 18.1% (con Jefferson).

Jefferson e Washington erano nati in Virginia.
Il primo ne era stato governatore.

La storia non finisce qui

Nel corso degli anni sono state proposte più soluzioni in U.S.A.: Hamilton (1791), Jefferson (1791), Webster (1830), Adams (1830), Dean (1832), Hill (1911).

Gli U.S.A. hanno modificato la legge elettorale più volte:

- 1792–1840: Jefferson;
- 1840–1850: Webster;
- 1850–1911: Hamilton;
- 1911–1941: Webster;
- 1941–oggi: Huntington–Hill.

In Europa, alcuni metodi sono conosciuti con nomi diversi: D'Hondt (per Jefferson), Sainte-Laguë (per Webster) o Hare-Niemeyer (per Hamilton).

La storia non finisce qui

Nel corso degli anni sono state proposte più soluzioni in U.S.A.: Hamilton (1791), Jefferson (1791), Webster (1830), Adams (1830), Dean (1832), Hill (1911).

Gli U.S.A. hanno modificato la legge elettorale più volte:

- 1792–1840: Jefferson;
- 1840–1850: Webster;
- 1850–1911: Hamilton;
- 1911–1941: Webster;
- 1941–oggi: Huntington–Hill.

In Europa, alcuni metodi sono conosciuti con nomi diversi: D'Hondt (per Jefferson), Sainte-Laguë (per Webster) o Hare-Niemeyer (per Hamilton).

La storia non finisce qui

Nel corso degli anni sono state proposte più soluzioni in U.S.A.: Hamilton (1791), Jefferson (1791), Webster (1830), Adams (1830), Dean (1832), Hill (1911).

Gli U.S.A. hanno modificato la legge elettorale più volte:

- 1792–1840: Jefferson;
- 1840–1850: Webster;
- 1850–1911: Hamilton;
- 1911–1941: Webster;
- 1941–oggi: Huntington–Hill.

In Europa, alcuni metodi sono conosciuti con nomi diversi: D'Hondt (per Jefferson), Sainte-Laguë (per Webster) o Hare-Niemeyer (per Hamilton).

Il paradosso della popolazione

Se non vogliamo ridurre tutto ad una questione di potere, dobbiamo esaminare la bontà di un metodo in base ad argomenti di equità e di buon senso.

Ecco un argomento per *non* utilizzare Hamilton.

Il paradosso della popolazione

Se non vogliamo ridurre tutto ad una questione di potere, dobbiamo esaminare la bontà di un metodo in base ad argomenti di equità e di buon senso.

Ecco un argomento per *non* utilizzare Hamilton.

Stato	Pop.	Quota	Ham.
A	752	5.013	5
B	101	0.673	1
C	99	0.660	1
D	98	0.653	0
Tot.	1050	7	7

Il paradosso della popolazione

Se non vogliamo ridurre tutto ad una questione di potere, dobbiamo esaminare la bontà di un metodo in base ad argomenti di equità e di buon senso.

Ecco un argomento per *non* utilizzare Hamilton.

Stato	Pop.	Quota	Ham.
A	752	5.013	5
B	101	0.673	1
C	99	0.660	1
D	98	0.653	0
Tot.	1050	7	7

$\Rightarrow$

Stato	Pop.	Quota	Ham.
A	753	3.984	4
B	377	1.995	2
C	96	0.508	0
D	97	0.513	1
Tot.	1323	7	7

Il paradosso della popolazione

Se non vogliamo ridurre tutto ad una questione di potere, dobbiamo esaminare la bontà di un metodo in base ad argomenti di equità e di buon senso.

Ecco un argomento per *non* utilizzare Hamilton.

Stato	Pop.	Quota	Ham.
A	752	5.013	5
B	101	0.673	1
C	99	0.660	1
D	98	0.653	0
Tot.	1050	7	7

$\Rightarrow$

Stato	Pop.	Quota	Ham.
A	753	3.984	4
B	377	1.995	2
C	96	0.508	0
D	97	0.513	1
Tot.	1323	7	7

La popolazione di A aumenta ma i suoi seggi calano.

La popolazione di D cala ma i suoi seggi aumentano.

Il paradosso dell'Alabama

A popolazioni costanti, aumentare il numero totale dei seggi può ridurre il numero dei seggi assegnati ad uno stato.

Il paradosso dell'Alabama

A popolazioni costanti, aumentare il numero totale dei seggi può ridurre il numero dei seggi assegnati ad uno stato.

Riprendiamo l'esempio, prima con 21 seggi e poi con 22.

Stato	Pop.
A	727
B	123
C	222
Tot.	1072

Quota	Ham.
14.24	14
2.41	3
4.35	4
21	21

Il paradosso dell'Alabama

A popolazioni costanti, aumentare il numero totale dei seggi può ridurre il numero dei seggi assegnati ad uno stato.

Riprendiamo l'esempio, prima con 21 seggi e poi con 22.

Stato	Pop.
A	727
B	123
C	222
Tot.	1072

Quota	Ham.
14.24	14
2.41	3
4.35	4
21	21

Quota	Ham.
14.92	15
2.52	2
4.56	5
22	22

I numero dei seggi aumenta da 21 a 22, ma i seggi assegnati a B diminuiscono.

Il paradosso dei nuovi stati (Oklahoma, 1907)

L'Oklahoma entrò negli Stati Uniti nel 1907.
Il Congresso aveva 386 seggi.
All'Oklahoma ne furono assegnati 5, portando il totale a 391.

Il paradosso dei nuovi stati (Oklahoma, 1907)

L'Oklahoma entrò negli Stati Uniti nel 1907.
Il Congresso aveva 386 seggi.
All'Oklahoma ne furono assegnati 5, portando il totale a 391.

Stato	prima
Oklahoma	0
Maine	3
New York	38
Totale	386

Il paradosso dei nuovi stati (Oklahoma, 1907)

L'Oklahoma entrò negli Stati Uniti nel 1907.
Il Congresso aveva 386 seggi.
All'Oklahoma ne furono assegnati 5, portando il totale a 391.

Stato	prima	dopo
Oklahoma	0	5
Maine	3	4
New York	38	37
Totale	386	391

Il paradosso dei nuovi stati (Oklahoma, 1907)

L'Oklahoma entrò negli Stati Uniti nel 1907.
Il Congresso aveva 386 seggi.
All'Oklahoma ne furono assegnati 5, portando il totale a 391.

Stato	prima	dopo
Oklahoma	0	5
Maine	3	4
New York	38	37
Totale	386	391

Aggiungere cinque seggi per far posto all'Oklahoma modifica il numero dei seggi assegnati ad altri stati.

Il paradosso dei nuovi stati (Oklahoma, 1907)

L'Oklahoma entrò negli Stati Uniti nel 1907.
Il Congresso aveva 386 seggi.
All'Oklahoma ne furono assegnati 5, portando il totale a 391.

Stato	prima	dopo
Oklahoma	0	5
Maine	3	4
New York	38	37
Totale	386	391

Aggiungere cinque seggi per far posto all'Oklahoma modifica il numero dei seggi assegnati ad altri stati.

Esistono metodi che sono immuni da questi problemi.

Qual'è la fonte dei problemi con Hamilton?

Il metodo di Hamilton funziona in due stadi:

1. Assegna i seggi secondo la parte intera della quota.
2. Assegna i seggi residui in base ai resti più alti.

La parte intera ed i resti dipendono in modo diverso dalle popolazioni e dal numero dei seggi disponibili.

Il metodo di Hamilton assegna i seggi usando due priorità diverse, che non sono coerenti tra loro.

Proviamo a ragionare diversamente e cerchiamo un modo per assegnare tutti i seggi seguendo una sola priorità.

Qual'è la fonte dei problemi con Hamilton?

Il metodo di Hamilton funziona in due stadi:

1. Assegna i seggi secondo la parte intera della quota.
2. Assegna i seggi residui in base ai resti più alti.

La parte intera ed i resti dipendono in modo diverso dalle popolazioni e dal numero dei seggi disponibili.

Il metodo di Hamilton assegna i seggi usando due priorità diverse, che non sono coerenti tra loro.

Proviamo a ragionare diversamente e cerchiamo un modo per assegnare tutti i seggi seguendo una sola priorità.

Qual'è la fonte dei problemi con Hamilton?

Il metodo di Hamilton funziona in due stadi:

1. Assegna i seggi secondo la parte intera della quota.
2. Assegna i seggi residui in base ai resti più alti.

La parte intera ed i resti dipendono in modo diverso dalle popolazioni e dal numero dei seggi disponibili.

Il metodo di Hamilton assegna i seggi usando due priorità diverse, che non sono coerenti tra loro.

Proviamo a ragionare diversamente e cerchiamo un modo per assegnare tutti i seggi seguendo una sola priorità.

Qual'è la fonte dei problemi con Hamilton?

Il metodo di Hamilton funziona in due stadi:

1. Assegna i seggi secondo la parte intera della quota.
2. Assegna i seggi residui in base ai resti più alti.

La parte intera ed i resti dipendono in modo diverso dalle popolazioni e dal numero dei seggi disponibili.

Il metodo di Hamilton assegna i seggi usando due priorità diverse, che non sono coerenti tra loro.

Proviamo a ragionare diversamente e cerchiamo un modo per assegnare tutti i seggi seguendo una sola priorità.

Qual'è la fonte dei problemi con Hamilton?

Il metodo di Hamilton funziona in due stadi:

1. Assegna i seggi secondo la parte intera della quota.
2. Assegna i seggi residui in base ai resti più alti.

La parte intera ed i resti dipendono in modo diverso dalle popolazioni e dal numero dei seggi disponibili.

Il metodo di Hamilton assegna i seggi usando due priorità diverse, che non sono coerenti tra loro.

Proviamo a ragionare diversamente e cerchiamo un modo per assegnare tutti i seggi seguendo una sola priorità.

Un solo indice di priorità

Il rapporto p_i/s_i indica il numero di elettori che fanno capo a un seggio: più alto l'indice, minore è la rappresentatività del seggio.

Assegniamo i seggi uno per volta seguendo l'ordine di priorità fissato dall'indice p_i/s_i.

Un solo indice di priorità

Il rapporto p_i/s_i indica il numero di elettori che fanno capo a un seggio: più alto l'indice, minore è la rappresentatività del seggio.

Assegniamo i seggi uno per volta seguendo l'ordine di priorità fissato dall'indice p_i/s_i.

All'inizio, nessun seggio è stato assegnato.

Stato	Pop.	Quota	Seggi	Indice
A	727	14.24	0	∞
B	123	2.41	0	∞
C	222	4.35	0	∞
Tot.	1072	21	0	

Assegniamo un seggio a ciascuno dei tre stati.

Un solo indice di priorità

Il rapporto p_i/s_i indica il numero di elettori che fanno capo a un seggio: più alto l'indice, minore è la rappresentatività del seggio.

Assegniamo i seggi uno per volta seguendo l'ordine di priorità fissato dall'indice p_i/s_i.

Adesso tutti gli stati hanno un seggio.

Stato	Pop.	Quota	Seggi	Indice
A	727	14.24	1	727
B	123	2.41	1	123
C	222	4.35	1	222
Tot.	1072	21	3	

Assegniamo il prossimo seggio ad A.

Un solo indice di priorità

Il rapporto p_i/s_i indica il numero di elettori che fanno capo a un seggio: più alto l'indice, minore è la rappresentatività del seggio.

Assegniamo i seggi uno per volta seguendo l'ordine di priorità fissato dall'indice p_i/s_i.

Adesso A ha due seggi, B uno e C uno.

Stato	Pop.	Quota	Seggi	Indice
A	727	14.24	2	363.5
B	123	2.41	1	123
C	222	4.35	1	222
Tot.	1072	21	4	

Assegniamo un altro seggio ad A.

Un solo indice di priorità

Il rapporto p_i/s_i indica il numero di elettori che fanno capo a un seggio: più alto l'indice, minore è la rappresentatività del seggio.

Assegniamo i seggi uno per volta seguendo l'ordine di priorità fissato dall'indice p_i/s_i.

Adesso A ha tre seggi, B uno e C uno.

Stato	Pop.	Quota	Seggi	Indice
A	727	14.24	3	242.3
B	123	2.41	1	123
C	222	4.35	1	222
Tot.	1072	21	5	

Assegniamo un altro seggio ad A.

Un solo indice di priorità

Il rapporto p_i/s_i indica il numero di elettori che fanno capo a un seggio: più alto l'indice, minore è la rappresentatività del seggio.

Assegniamo i seggi uno per volta seguendo l'ordine di priorità fissato dall'indice p_i/s_i.

Adesso A ha quattro seggi, B uno e C uno.

Stato	Pop.	Quota	Seggi	Indice
A	727	14.24	4	181.8
B	123	2.41	1	123
C	222	4.35	1	222
Tot.	1072	21	6	

Diamo il settimo seggio a C.

Un solo indice di priorità

Il rapporto p_i/s_i indica il numero di elettori che fanno capo a un seggio: più alto l'indice, minore è la rappresentatività del seggio.

Assegniamo i seggi uno per volta seguendo l'ordine di priorità fissato dall'indice p_i/s_i.

... e così via, fino ad assegnare il ventunesimo seggio.

Stato	Pop.	Quota	Seggi	Indice
A	727	14.24	14	51.9
B	123	2.41	2	61.5
C	222	4.35	4	55.5
Tot.	1072	21	20	

Diamo l'ultimo seggio disponibile a B.

Un solo indice di priorità

Il rapporto p_i/s_i indica il numero di elettori che fanno capo a un seggio: più alto l'indice, minore è la rappresentatività del seggio.

Assegniamo i seggi uno per volta seguendo l'ordine di priorità fissato dall'indice p_i/s_i.

Ed ecco l'assegnazione finale.

Stato	Pop.	Quota	Seggi	Indice
A	727	14.24	14	51.9
B	123	2.41	3	41
C	222	4.35	4	55.5
Tot.	1072	21	21	

In questo caso, è la stessa assegnazione di Hamilton.

I metodi di Jefferson, Adams e Webster

La procedura appena descritta equivale al metodo di Adams.

Il metodo di Adams dispensa i seggi uno alla volta secondo un criterio di priorità misurato da p_i/s_i.

Ovviamente si possono usare criteri di priorità diversi.

Il metodo di Jefferson usa come criterio di priorità $p_i/(s_i+1)$, che è il rapporto fra numero di elettori e numero dei seggi **dopo** avere assegnato il seggio.

Il metodo di Webster sta a mezza strada ed usa $p_i/[s_i+(1/2)]$.

Stato	Pop.	Quota	Ham.	Ada.	Jef.	Web.
A	727	14.24	14	14	15	15
B	123	2.41	3	3	2	2
C	222	4.35	4	4	4	4
Tot.	1072	21	21	21	21	21

I metodi di Jefferson, Adams e Webster

La procedura appena descritta equivale al metodo di Adams.

Il metodo di Adams dispensa i seggi uno alla volta secondo un criterio di priorità misurato da p_i/s_i.

Ovviamente si possono usare criteri di priorità diversi.

Il metodo di Jefferson usa come criterio di priorità $p_i/(s_i+1)$, che è il rapporto fra numero di elettori e numero dei seggi **dopo** avere assegnato il seggio.

Il metodo di Webster sta a mezza strada ed usa $p_i/[s_i+(1/2)]$.

Stato	Pop.	Quota	Ham.	Ada.	Jef.	Web.
A	727	14.24	14	14	15	15
B	123	2.41	3	3	2	2
C	222	4.35	4	4	4	4
Tot.	1072	21	21	21	21	21

I metodi di Jefferson, Adams e Webster

La procedura appena descritta equivale al metodo di Adams.

Il metodo di Adams dispensa i seggi uno alla volta secondo un criterio di priorità misurato da p_i/s_i.

Ovviamente si possono usare criteri di priorità diversi.

Il metodo di Jefferson usa come criterio di priorità $p_i/(s_i+1)$, che è il rapporto fra numero di elettori e numero dei seggi **dopo** avere assegnato il seggio.

Il metodo di Webster sta a mezza strada ed usa $p_i/[s_i+(1/2)]$.

Stato	Pop.	Quota	Ham.	Ada.	Jef.	Web.
A	727	14.24	14	14	15	15
B	123	2.41	3	3	2	2
C	222	4.35	4	4	4	4
Tot.	1072	21	21	21	21	21

Usiamo un foglio elettronico

Assegniamo sette seggi con due metodi diversi.

1) Adams: ogni cella riporta il rapporto p_i/s_i.

Stato	Pop.	0	1	2	3	4	5
A	4800	∞^1	4800^4	2400^5	1600^6	1200	960
B	1500	∞^2	1500^7	750	500	375	300
C	700	∞^3	700	350	233	175	140

Assegnazione: A=5, B=2, C=1

2) Jefferson: ogni cella riporta il rapporto $p_i/(s_i+1)$.

State	Pop.	0	1	2	3	4	5
A	4800	4800^1	2400^2	1600^3	1200^5	960^6	800^7
B	1500	1500^4	750	500	375	300	250
C	700	700	350	233	175	140	117

Assegnazione: A=6, B=1, C=0

Usiamo un foglio elettronico

Assegniamo sette seggi con due metodi diversi.

1) Adams: ogni cella riporta il rapporto p_i/s_i.

Stato	Pop.	0	1	2	3	4	5
A	4800	∞^1	4800^4	2400^5	1600^6	1200	960
B	1500	∞^2	1500^7	750	500	375	300
C	700	∞^3	700	350	233	175	140

Assegnazione: A=5, B=2, C=1

2) Jefferson: ogni cella riporta il rapporto $p_i/(s_i+1)$.

State	Pop.	0	1	2	3	4	5
A	4800	4800^1	2400^2	1600^3	1200^5	960^6	800^7
B	1500	1500^4	750	500	375	300	250
C	700	700	350	233	175	140	117

Assegnazione: A=6, B=1, C=0

Usiamo un foglio elettronico

Assegniamo sette seggi con due metodi diversi.

1) Adams: ogni cella riporta il rapporto p_i/s_i.

Stato	Pop.	0	1	2	3	4	5
A	4800	∞^1	4800^4	2400^5	1600^6	1200	960
B	1500	∞^2	1500^7	750	500	375	300
C	700	∞^3	700	350	233	175	140

Assegnazione: A=5, B=2, C=1

2) Jefferson: ogni cella riporta il rapporto $p_i/(s_i+1)$.

State	Pop.	0	1	2	3	4	5
A	4800	4800^1	2400^2	1600^3	1200^5	960^6	800^7
B	1500	1500^4	750	500	375	300	250
C	700	700	350	233	175	140	117

Assegnazione: A=6, B=1, C=0

I metodi con divisore

Hamilton assegna i seggi seguendo due criteri di priorità diversi: prima la parte intera, poi i resti.

Questo lo rende soggetto ai paradossi.

I metodi con divisore seguono un solo ordinamento di priorità.

Questo li rende immuni dai paradossi.

I principali metodi con divisore sono cinque:

Adams, Dean, Hill, Webster, Jefferson

Qual è il migliore?

Questa domanda non ha una risposta univoca. Ecco due risposte parziali.

1) I metodi con divisore che favoriscono gli stati piccoli sono, nell'ordine:

Adams > Dean > Hill > Webster > Jefferson

I metodi con divisore

Hamilton assegna i seggi seguendo due criteri di priorità diversi: prima la parte intera, poi i resti.

Questo lo rende soggetto ai paradossi.

I metodi con divisore seguono un solo ordinamento di priorità.

Questo li rende immuni dai paradossi.

I principali metodi con divisore sono cinque:

Adams, Dean, Hill, Webster, Jefferson

Qual è il migliore?

Questa domanda non ha una risposta univoca. Ecco due risposte parziali.

1) I metodi con divisore che favoriscono gli stati piccoli sono, nell'ordine:

Adams > Dean > Hill > Webster > Jefferson

I metodi con divisore

Hamilton assegna i seggi seguendo due criteri di priorità diversi: prima la parte intera, poi i resti.

Questo lo rende soggetto ai paradossi.

I metodi con divisore seguono un solo ordinamento di priorità.

Questo li rende immuni dai paradossi.

I principali metodi con divisore sono cinque:

Adams, Dean, Hill, Webster, Jefferson

Qual è il migliore?

Questa domanda non ha una risposta univoca. Ecco due risposte parziali.

1) I metodi con divisore che favoriscono gli stati piccoli sono, nell'ordine:

Adams $>$ Dean $>$ Hill $>$ Webster $>$ Jefferson

I metodi con divisore

Hamilton assegna i seggi seguendo due criteri di priorità diversi: prima la parte intera, poi i resti.

Questo lo rende soggetto ai paradossi.

I metodi con divisore seguono un solo ordinamento di priorità.

Questo li rende immuni dai paradossi.

I principali metodi con divisore sono cinque:

Adams, Dean, Hill, Webster, Jefferson

Qual è il migliore?

Questa domanda non ha una risposta univoca. Ecco due risposte parziali.

1) I metodi con divisore che favoriscono gli stati piccoli sono, nell'ordine:

Adams $>$ Dean $>$ Hill $>$ Webster $>$ Jefferson

I metodi con divisore

Hamilton assegna i seggi seguendo due criteri di priorità diversi: prima la parte intera, poi i resti.

Questo lo rende soggetto ai paradossi.

I metodi con divisore seguono un solo ordinamento di priorità.

Questo li rende immuni dai paradossi.

I principali metodi con divisore sono cinque:

Adams, Dean, Hill, Webster, Jefferson

Qual è il migliore?

Questa domanda non ha una risposta univoca. Ecco due risposte parziali.

1) I metodi con divisore che favoriscono gli stati piccoli sono, nell'ordine:

$$\text{Adams} > \text{Dean} > \text{Hill} > \text{Webster} > \text{Jefferson}$$

Una risposta parziale

Quando ci sono solo due stati, la soluzione standard è assegnare a ciascun stato numero di seggi più vicino alla sua quota.

Stato	Pop.	Quota	Ham.	Web.
A	727	14.54	15	15
B	123	2.46	2	2
Tot.	850	17	17	17

Soltanto Hamilton e Webster concordano sulla soluzione standard in ogni problema con due stati.

Tuttavia, Webster è l'unica soluzione coerente.

Stato	Pop.	Quota	Ham.	Web.
A	727	14.24	14	15
B	123	2.41	3	2
C	222	4.35	4	4
Tot.	1072	21	21	21

Una risposta parziale

Quando ci sono solo due stati, la soluzione standard è assegnare a ciascun stato numero di seggi più vicino alla sua quota.

Stato	Pop.	Quota	Ham.	Web.
A	727	14.54	15	15
B	123	2.46	2	2
Tot.	850	17	17	17

Soltanto Hamilton e Webster concordano sulla soluzione standard in ogni problema con due stati.

Tuttavia, Webster è l'unica soluzione coerente.

Stato	Pop.	Quota	Ham.	Web.
A	727	14.24	14	15
B	123	2.41	3	2
C	222	4.35	4	4
Tot.	1072	21	21	21

La soluzione italiana

La Costituzione del 1948 si limitò a fissare il principio proporzionale per l'elezione del Senato, su base regionale.

La riforma costituzionale del 1963 ha sancito il metodo di Hamilton.

La riforma costituzionale del 2020 ha confermato il metodo di Hamilton.

Art. 57: "La ripartizione dei seggi tra le Regioni o le Province autonome si effettua [...] in proporzione alla loro popolazione, [...] sulla base dei quozienti interi e dei più alti resti."

Spesso (non sempre!) Hamilton e Webster generano ripartizioni uguali.

Nel caso del Senato 2020, i due metodi conducono alla stessa ripartizione.

(Tuttavia, se si usasse Jefferson, l'Umbria dovrebbe ricorrere alla garanzia dei tre seggi e il Veneto perderebbe un seggio a favore della Campania.)

La soluzione italiana

La Costituzione del 1948 si limitò a fissare il principio proporzionale per l'elezione del Senato, su base regionale.

La riforma costituzionale del 1963 ha sancito il metodo di Hamilton.

La riforma costituzionale del 2020 ha confermato il metodo di Hamilton.

Art. 57: "La ripartizione dei seggi tra le Regioni o le Province autonome si effettua [...] in proporzione alla loro popolazione, [...] sulla base dei quozienti interi e dei più alti resti."

Spesso (non sempre!) Hamilton e Webster generano ripartizioni uguali.

Nel caso del Senato 2020, i due metodi conducono alla stessa ripartizione.

(Tuttavia, se si usasse Jefferson, l'Umbria dovrebbe ricorrere alla garanzia dei tre seggi e il Veneto perderebbe un seggio a favore della Campania.)

La soluzione italiana

La Costituzione del 1948 si limitò a fissare il principio proporzionale per l'elezione del Senato, su base regionale.

La riforma costituzionale del 1963 ha sancito il metodo di Hamilton.

La riforma costituzionale del 2020 ha confermato il metodo di Hamilton.

Art. 57: "La ripartizione dei seggi tra le Regioni o le Province autonome si effettua [...] in proporzione alla loro popolazione, [...] sulla base dei quozienti interi e dei più alti resti."

Spesso (non sempre!) Hamilton e Webster generano ripartizioni uguali.

Nel caso del Senato 2020, i due metodi conducono alla stessa ripartizione.

(Tuttavia, se si usasse Jefferson, l'Umbria dovrebbe ricorrere alla garanzia dei tre seggi e il Veneto perderebbe un seggio a favore della Campania.)

La soluzione italiana

La Costituzione del 1948 si limitò a fissare il principio proporzionale per l'elezione del Senato, su base regionale.

La riforma costituzionale del 1963 ha sancito il metodo di Hamilton.

La riforma costituzionale del 2020 ha confermato il metodo di Hamilton.

Art. 57: "La ripartizione dei seggi tra le Regioni o le Province autonome si effettua [...] in proporzione alla loro popolazione, [...] sulla base dei quozienti interi e dei più alti resti."

Spesso (non sempre!) Hamilton e Webster generano ripartizioni uguali.

Nel caso del Senato 2020, i due metodi conducono alla stessa ripartizione.

(Tuttavia, se si usasse Jefferson, l'Umbria dovrebbe ricorrere alla garanzia dei tre seggi e il Veneto perderebbe un seggio a favore della Campania.)

La soluzione italiana

La Costituzione del 1948 si limitò a fissare il principio proporzionale per l'elezione del Senato, su base regionale.

La riforma costituzionale del 1963 ha sancito il metodo di Hamilton.

La riforma costituzionale del 2020 ha confermato il metodo di Hamilton.

Art. 57: "La ripartizione dei seggi tra le Regioni o le Province autonome si effettua [...] in proporzione alla loro popolazione, [...] sulla base dei quozienti interi e dei più alti resti."

Spesso (non sempre!) Hamilton e Webster generano ripartizioni uguali.

Nel caso del Senato 2020, i due metodi conducono alla stessa ripartizione.

(Tuttavia, se si usasse Jefferson, l'Umbria dovrebbe ricorrere alla garanzia dei tre seggi e il Veneto perderebbe un seggio a favore della Campania.)

Facciamo i conti? (Elezioni 2022)

1) Quanti seggi dobbiamo ripartire?

Il numero dei senatori elettivi è di duecento, quattro dei quali eletti nella circoscrizione Estero. Nessuna Regione o Provincia autonoma può avere un numero di senatori inferiore a tre; il Molise ne ha due, la Valle d'Aosta uno.

Al netto dell'Estero, i seggi sono $200 - 4 = 196$.
Togliendo i $1 + 2 + (3 + 3) + 3 = 12$ seggi garantiti, ne restano da assegnare 184.

2) Come si stabilisce la popolazione di ciascuna Regione o Provincia?

La ripartizione dei seggi [...] *si effettua in proporzione alla loro popolazione, quale risulta dall'ultimo censimento generale,*

Usiamo il censimento permanente della popolazione a cura dell'ISTAT, con riferimento ai dati del 31 dicembre 2020 aggiornati al 2022.

I residenti censiti erano 59.433.744. (Oggi sono di meno.)

I residenti di regioni e province non garantite erano 57.385.767.

Facciamo i conti? (Elezioni 2022)

1) Quanti seggi dobbiamo ripartire?

Il numero dei senatori elettivi è di duecento, quattro dei quali eletti nella circoscrizione Estero. Nessuna Regione o Provincia autonoma può avere un numero di senatori inferiore a tre; il Molise ne ha due, la Valle d'Aosta uno.

Al netto dell'Estero, i seggi sono $200 - 4 = 196$.
Togliendo i $1 + 2 + (3 + 3) + 3 = 12$ seggi garantiti, ne restano da assegnare 184.

2) Come si stabilisce la popolazione di ciascuna Regione o Provincia?

La ripartizione dei seggi [...] *si effettua in proporzione alla loro popolazione, quale risulta dall'ultimo censimento generale,*

Usiamo il censimento permanente della popolazione a cura dell'ISTAT, con riferimento ai dati del 31 dicembre 2020 aggiornati al 2022.

I residenti censiti erano 59.433.744. (Oggi sono di meno.)

I residenti di regioni e province non garantite erano 57.385.767.

Facciamo i conti? (Elezioni 2022)

1) Quanti seggi dobbiamo ripartire?

Il numero dei senatori elettivi è di duecento, quattro dei quali eletti nella circoscrizione Estero. Nessuna Regione o Provincia autonoma può avere un numero di senatori inferiore a tre; il Molise ne ha due, la Valle d'Aosta uno.

Al netto dell'Estero, i seggi sono $200 - 4 = 196$.
Togliendo i $1 + 2 + (3 + 3) + 3 = 12$ seggi garantiti, ne restano da assegnare 184.

2) Come si stabilisce la popolazione di ciascuna Regione o Provincia?

La ripartizione dei seggi [...] *si effettua in proporzione alla loro popolazione, quale risulta dall'ultimo censimento generale,*

Usiamo il censimento permanente della popolazione a cura dell'ISTAT, con riferimento ai dati del 31 dicembre 2020 aggiornati al 2022.

I residenti censiti erano 59.433.744. (Oggi sono di meno.)

I residenti di regioni e province non garantite erano 57.385.767.

Facciamo i conti? (Elezioni 2022)

1) Quanti seggi dobbiamo ripartire?

Il numero dei senatori elettivi è di duecento, quattro dei quali eletti nella circoscrizione Estero. Nessuna Regione o Provincia autonoma può avere un numero di senatori inferiore a tre; il Molise ne ha due, la Valle d'Aosta uno.

Al netto dell'Estero, i seggi sono $200 - 4 = 196$.
Togliendo i $1 + 2 + (3 + 3) + 3 = 12$ seggi garantiti, ne restano da assegnare 184.

2) Come si stabilisce la popolazione di ciascuna Regione o Provincia?

La ripartizione dei seggi [...] *si effettua in proporzione alla loro popolazione, quale risulta dall'ultimo censimento generale,*

Usiamo il censimento permanente della popolazione a cura dell'ISTAT, con riferimento ai dati del 31 dicembre 2020 aggiornati al 2022.

I residenti censiti erano 59.433.744. (Oggi sono di meno.)

I residenti di regioni e province non garantite erano 57.385.767.

Senato: Elezioni del 2022

Nel 2020, 196 seggi da ripartire su una popolazione di 59.433.744 residenti in Italia corrispondono ad un rapporto (medio) di **303.233** elettori per ciascun seggio.

In pratica, tenuto conto dei minimi garantiti, dobbiamo ripartire 184 seggi su una popolazione di 57.385.767 residenti in 16 regioni italiane, pari ad un rapporto (medio) di **311.879** elettori per ciascun seggio.

Senato: Elezioni del 2022

Nel 2020, 196 seggi da ripartire su una popolazione di 59.433.744 residenti in Italia corrispondono ad un rapporto (medio) di **303.233** elettori per ciascun seggio.

In pratica, tenuto conto dei minimi garantiti, dobbiamo ripartire 184 seggi su una popolazione di 57.385.767 residenti in 16 regioni italiane, pari ad un rapporto (medio) di **311.879** elettori per ciascun seggio.

Senato: Elezioni del 2022

Nel 2020, 196 seggi da ripartire su una popolazione di 59.433.744 residenti in Italia corrispondono ad un rapporto (medio) di **303.233** elettori per ciascun seggio.

In pratica, tenuto conto dei minimi garantiti, dobbiamo ripartire 184 seggi su una popolazione di 57.385.767 residenti in 16 regioni italiane, pari ad un rapporto (medio) di **311.879** elettori per ciascun seggio.

Ecco (parte della) ripartizione dei 184 seggi nel 2022, fatta con il metodo di Hamilton.

	Costituzione	p_i/s_i
Veneto	16	303.494
Lombardia	31	313.037
Sardegna	5	327.872
Umbria	3	294.756

Senato: Elezioni del 2022

Nel 2020, 196 seggi da ripartire su una popolazione di 59.433.744 residenti in Italia corrispondono ad un rapporto (medio) di **303.233** elettori per ciascun seggio.

In pratica, tenuto conto dei minimi garantiti, dobbiamo ripartire 184 seggi su una popolazione di 57.385.767 residenti in 16 regioni italiane, pari ad un rapporto (medio) di **311.879** elettori per ciascun seggio.

Ecco (parte della) ripartizione dei 184 seggi nel 2022, fatta con il metodo di Hamilton.

	Costituzione	p_i/s_i
Veneto	16	303.494
Lombardia	31	313.037
Sardegna	5	327.872
Umbria	3	294.756
Val d'Aosta	1	126.806
Trentino-A.A.	6	171.579
Molise	2	156.830
Basilicata	3	192.679

Ai colleghi docenti:
nelle prossime cinque pagine trovate materiale aggiuntivo [. . .]

Ai signori studenti:
[. . .] dove è spiegato perché ho parlato di metodi con divisore.

Grazie per l'attenzione!

Ai colleghi docenti:
nelle prossime cinque pagine trovate materiale aggiuntivo [. . .]

Ai signori studenti:
[. . .] dove è spiegato perché ho parlato di metodi con divisore.

Grazie per l'attenzione!

Ai colleghi docenti:
nelle prossime cinque pagine trovate materiale aggiuntivo [. . .]

Ai signori studenti:
[. . .] dove è spiegato perché ho parlato di metodi con divisore.

Grazie per l'attenzione!

Materiale aggiuntivo (per i docenti)

Regole di arrotondamento

Le regole più comuni per arrotondare un numero x a un intero sono tre:

1) per difetto $\lfloor 3.42 \rfloor = 3$;
2) per eccesso $\lceil 3.42 \rceil = 4$;
3) all'intero più vicino $[3.42] = 3$.

Queste regole sono casi speciali di un metodo più generale.

Dato un numero x, calcolate i due interi $\lfloor x \rfloor$ e $\lceil x \rceil$.
Scegliete una funzione $f(x_1, x_2)$ e arrotondate x come segue:

se $x > f(\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil)$, allora arrotondate x con $\lceil x \rceil$;
se $x < f(\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil)$, allora arrotondate x with $\lfloor x \rfloor$.

Scegliendo $f(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2)$, si arrotonda per difetto;
scegliendo $f(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2)$, si arrotonda per eccesso;
scegliendo $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, si arrotonda all'intero più vicino.

Nel terzo caso, abbiamo usato la media aritmetica.
Usando altre medie, generiamo regole diverse di arrontondamento.

La quantità $\mathrm{gm}(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$ è la media geometrica di x_1 e x_2.

Se $f(x_1, x_2) = \mathrm{gm}(x_1, x_2)$, la regola di arrotondamento è

se $x > \mathrm{gm}(\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil)$, allora arrotondate x con $\lceil x \rceil$;

se $x < \mathrm{gm}(\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil)$, allora arrotondate x con $\lfloor x \rfloor$.

Esempio: sia $14 < x < 15$. Giacché

$$\mathrm{gm}(14, 15) = \sqrt{14 \cdot 15} \approx 14.49$$

$x < 14.49$ è arrotondato per difetto e $x > 14.49$ per eccesso.

La quantità $\mathrm{hm}(x_1, x_2) = \dfrac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}$ è la media armonica di x_1 e x_2.

Se $f(x_1, x_2) = \mathrm{hm}(x_1, x_2)$, la regola di arrotondamento è

se $x > \mathrm{hm}(\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil)$, allora arrotondate x con $\lceil x \rceil$;

se $x < \mathrm{hm}(\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil)$, allora arrotondate x con $\lfloor x \rfloor$.

Esempio: sia $14 < x < 15$. Giacché

$$\mathrm{hm}(14, 15) \approx 14.48$$

$x < 14.48$ è arrotondato per difetto e $x > 14.48$ per eccesso.

Calcolo diretto per i metodi con divisore

Ci sono A seggi da distribuire fra n stati. Ogni stato i ha una popolazione p_i. Un metodo di ripartizione assegna a_i seggi a i, con $\sum_i a_i = A$.

Stato	Pop.	Quota
A	727	14.24
B	123	2.41
C	222	4.35
Tot.	1072	21

Metodo di Jefferson: cerca un divisore comune d tale che $\sum_k \lfloor p_k/d \rfloor$ sia uguale al numero dei seggi da assegnare.

Se $d = 1072/21 = 51$, troviamo $A \to \lfloor 14.24 \rfloor = 14$, $B \to \lfloor 2.41 \rfloor = 2$, $C \to \lfloor 4.35 \rfloor = 4$. La somma fa 20, che è inferiore al numero dei seggi.

Proviamo a diminuire il divisore. Se $d = 48$, $A \to \lfloor 15.15 \rfloor = 15$, $B \to \lfloor 2.56 \rfloor = 2$, $C \to \lfloor 4.16 \rfloor$. La somma è uguale al numero dei seggi.

Altri metodi con divisore

Metodo di Adams: cerca un divisore comune d tale che $\sum_k \lceil p_k/d \rceil$ sia uguale al numero dei seggi.

Se $d = 51$, $A \to \lceil 14.24 \rceil = 15$, $B \to \lceil 2.41 \rceil = 3$, $C \to \lceil 4.35 \rceil = 4$.
La somma vale 23: aumentiamo il divisore.

Se $d = 55.6$, $A \to \lceil 13.08 \rceil = 14$, $B \to \lceil 2.21 \rceil = 3$, $C \to \lceil 3.99 \rceil = 4$.
La somma vale 21: abbiamo trovato l'assegnazione.

Metodo di Hill: cerca un divisore comune d tale che $\sum_k (p_k/d)$ sia uguale al numero dei seggi.

Ai fini dell'arrotondamento, annotiamo che $\mathrm{gm}(14, 15) \approx 14.49$, $\mathrm{gm}(2, 3) \approx 2.4495$ e $\mathrm{gm}(4, 5) \approx 4.47$.

Se $d = 51$, $A \to (14.24) = 14$, $B \to (2.41) = 2$, $C \to (4.35) = 4$.
La somma vale 20: aumentiamo il divisore.

Se $d = 50$, $A \to (14.54) = 15$, $B \to (2.46) = 3$, $C \to (4.44) = 4$.
La somma vale 22: diminuiamo il divisore.

Se $d = 50.2$, $A \to (14.48) = 14$, $B \to (2.45) = 3$, $C \to (4.42) = 4$.
La somma vale 21: abbiamo trovato l'assegnazione.

Metodo di Webster: cerca un divisore comune d tale che $\sum_k [p_k/d]$ sia uguale al numero dei seggi.

Se $d = 51$, $A \to [14.24], B \to [2.41], C \to [4.35]$. La somma vale 20.

Se $d = 50$, $A \to [14.54], B \to [2.46], C \to [4.44]$. La somma vale 21: abbiamo trovato l'assegnazione.

Metodo di Dean: cerca un divisore comune d t.c. $\sum_k < p_k/d >$ sia uguale al numero dei seggi.

Osservazione: i divisori d che soddisfano la richiesta sono generalmente multipli, ma tutti conducono alla stessa assegnazione.