UNIVERSITÀ
CATTOLICA
del Sacro Cuore

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA PER LE SCIENZE

ECONOMICHE, FINANZIARIE ED ATTUARIALI

Sull'infinito nella cultura classica

Alfredo Malavolta

SULL’INFINITO NELLA CULTURA CLASSICA

“Ora è assolutamente certo che questi [i numeri] siano infiniti, perché a qualunque cifra uno pensi di fermarsi, io sostengo che non solo essa può essere aumentata con l’aggiunta di un solo numero, ma, per quanto grande sia e contenga una quantità infinita, secondo la stessa natura e scienza dei numeri, quella cifra può essere raddoppiata e addirittura moltiplicata! *In verità ogni numero è definito da alcune sue proprietà in modo che non ce ne può essere un altro simile ad esso. Perciò i numeri sono tutti differenti e diversi tra loro; in se stessi sono finiti, ma presi tutti insieme sono infiniti.*” (s. Agostino, De civitate Dei, XII, 19).

Queste espressioni di s. Agostino forniscono lo spunto all’interessante articolo di Carlo Toffalori “S. AGOSTINO – *L’infinito e la perfezione*” (Prisma 46, novembre 2022).

In esso l’autore afferma che s. Agostino ammette l’esistenza di un infinito che non è Dio, ma non è neanche solamente “in potenza”, un infinito, cioè, che la mente umana coglie come tale quando pensa, con linguaggio attuale, a certi insiemi, non ai singoli elementi che essi contengono, un infinito “in atto”.

La distinzione tra “infinito in potenza” e “infinito in atto” compare nell’opera di Aristotele; lo Stagirita ritiene che non si possa pensare all’esistenza di realtà infinite in atto e questa presa di posizione ha sicuramente influenzato il pensiero degli uomini di cultura che, dal XIII secolo in avanti, hanno basato i loro studi su quello aristotelico.

Tuttavia documenti e fonti attestano che, prima di Aristotele, buona parte dei filosofi hanno ammesso l’esistenza dell’infinito senza particolari limitazioni; ricordiamo, a tal proposito, l'*apeiron* di Anassimandro, le infinite omeomerie di Anassagora, gli infiniti atomi di Democrito, l'infinità della successione naturale di Platone.

Certo, *apeiron* è una parola che si presta ad essere tradotta "infinito" come grandezza, ma anche "indefinito", "indeterminato" qualitativamente e il Reale (Storia della filosofia antica, vol. I) sostiene che molto probabilmente in Anassimandro avesse entrambi i significati.

Se poi guardiamo ai frammenti di Anassagora, non solo troviamo che i *semi* di tutta la realtà, le *omeomerie*, sono "**illimitate sia in quantità sia in piccolezza",** espressione, se vogliamo, per noi abbastanza sibillina, ma soprattutto che "**Rispetto al piccolo non c'è un minimo, ma c'è sempre un più piccolo, perché l'esistente non può essere annullato per divisione. Così rispetto al grande, c'è sempre un più grande, *e il più grande è uguale al piccolo come pluralità,…*"** (riportato da Ettore Carruccio, "Matematica e logica nella storia e nel pensiero contemporaneo"; Gheroni, Torino, 1958).

A quanto possiamo capire, Anassagora afferma un'illimitatezza certamente potenziale delle omeomerie, che diventano grandi, perché formano cose grandi, e un'infinitesimalità potenziale, perché diventano piccole, in quanto possono essere divise in parti sempre più piccole; ma la questione più interessante è che il filosofo di Clazomene, come appare nella parte in corsivo della citazione, coglie la proprietà caratteristica degli insiemi infiniti, quella di essere in corrispondenza biunivoca con una loro parte propria.

Non entriamo nell'analisi storica di come e perché sia arrivato a tale risultato; ci limitiamo ad osservare che il frammento anassagoreo è in palese contrasto con un punto cardine dell'interpretazione della storia del pensiero scientifico e filosofico greco che da secoli appare come la più seguita, il rifiuto dell'infinito in atto.

Quanto a Platone, vorremmo citare solo una frase che il giovane matematico Teeteto, nel dialogo che porta il suo nome, pronuncia raccontando come i giovani matematici dell'Accademia studiano intorno al "maestro", Teodoro di Cirene: "...considerato che le potenze, evidentemente, sono infinite di numero, …".

Questo breve excursus fa vedere che, prima di Aristotele, l'infinito in atto non era affatto negato dalla cultura greca, anche se costituiva qualcosa su cui ragionare era difficile, anche, oseremmo dire soprattutto, se se ne parlava in ambito geometrico. Infatti gli studiosi sono abbastanza concordi sul fatto che sia stata la scoperta delle grandezze incommensurabili, da parte della scuola pitagorica, a determinare un momento di grosso imbarazzo ai matematici del momento, sia che essa sia avvenuta, come sostiene la maggior parte della tradizione, applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo avente come cateti due lati di un quadrato e come ipotenusa la diagonale dello stesso, sia che, invece, sia avvenuta nelle ricerche sulla sezione aurea, come ipotizza Carl Boyer ("Storia della matematica", Arnoldo Mondadori editore, Milano, 1998). Si tratta, comunque, di ricerche su enti dello spazio geometrico, che, come è noto, si identificava con lo spazio empirico.

Osserviamo, al riguardo, che una conseguenza fondamentale del risultato sull'incommensurabilità della diagonale e del lato di un quadrato, più in generale della scoperta di rapporti irrazionali di grandezze omogenee, era l'infinità dei punti di un segmento e ciò introduceva un altro problema, che sarà essenziale dal XVII secolo e lo è ancor più oggi, il problema della continuità. Se i punti di un segmento, che è limitato, sono infiniti, non è più possibile pensarli come sassolini, sia pure "senza dimensione", disposti uno accanto all'altro in modo da formare una linea appunto continua. In altre parole la linea retta deve avere una proprietà in più, rispetto a quelle già note, proprio la continuità, una proprietà che turbava, stando a Plutarco, anche gli studi di Democrito, che da sempre è apparso come uno dei più aperti alla spiegazione empirica dei fenomeni dell'universo e all'uso dell'infinito.

In sostanza la visione geometrica ordinata del mondo dei Pitagorici, basata sui numeri razionali, veniva messa in crisi, stavolta non "per colpa" degli avversari eleatici, che forse da tempo avevano mostrato a tutti l'esigenza dell'idea di continuità, ma dallo sviluppo della stessa geometria pitagorica.

Come mai, dunque, Aristotele rifiuta il fatto che la mente umana possa, in matematica, accettare l'infinito in atto?

Come è noto, Aristotele è molto attento allo sviluppo delle teorie matematiche, perché considera quello matematico il metodo che tutte le scienze teoretiche devono utilizzare per conoscere la realtà e interviene in maniera critica quando si accorge che una teoria viene sviluppata in modo metodologicamente scorretto. E' noto, al riguardo, la sua polemica con quei matematici che discettavano di enti di cui non si erano accertati dell'esistenza; e accertarsi dell'esistenza degli enti matematici, per lo Stagirita, voleva dire ricavarli dagli individui del mondo fisico, mediante un processo di astrazione; come il concetto di "cavallo", ad esempio, lo si ottiene dalla conoscenza di vari animali con certe caratteristiche, così, astraendo da diversi individui, coppie, insiemi di individui,, si ottengono 1, 2, via via tutti i numeri, che sono tutti diversi tra loro.

Questo processo conoscitivo dal particolare all'universale non permette ad Aristotele di accettare quegli enti astratti, che non possono essere colti dall'analisi dei vari individui, di qualsiasi tipo, esistenti nel mondo empirico; così, poiché nel mondo non c'è nulla di rettilineo che sia infinitamente lungo (diremmo illimitato), la mente umana non può pensare "la retta".

Il nuovo metodo per la ricerca di aree e volumi, dovuto ad Eudosso da Cnido, nell'Accademia platonica, il "metodo di esaustione", basato sul "riempire" via via la figura da misurare mediante altre figure, di cui si conosce la misura, metodo che soppianta gli affascinanti tentativi di Democrito (di cui ci dà testimonianza Archimede), basati sull'uso dell'infinito in atto, probabilmente ha convinto Aristotele che non era affatto necessario, per studiare matematica, accettare l'infinito in atto, come egli stesso ci dice: "Questo ragionamento [l'esclusione dell'infinito in atto] non distrugge le investigazioni dei matematici…giacché essi ora dell'infinito non hanno bisogno e non se ne servono, ma soltanto postulano che il segmento finito possa diventare tanto lungo quanto vogliono." (Aristotele, "Fisica", riportato da E. Carruccio in "Appunti di storia delle matematiche, della logica e della metamatematica", Pitagora, Bologna, 1977). Dunque non c'era bisogno, per la matematica, di ampliare il metodo di conoscenza aristotelico, che abbiamo visto, fino ad accettare che la mente umana possa pensare insiemi infiniti in atto.

S. Agostino, come si evince dalle parole riportate ad inizio di questo lavoro, dà atto ad Aristotele della validità del suo metodo, mediante il quale ogni numero viene introdotto individuando le sue proprietà caratteristiche, che lo differenziano da tutti gli altri, ma aggiunge proprio ciò che nel metodo aristotelico non era contemplato, la possibilità della mente umana di coglierli tutti insieme, come un unicum, appunto come un insieme infinito, hic et nunc.

Questa possibilità della mente umana sarà accolta, diversi secoli dopo, da Galileo e da Leibniz e, successivamente da Georg Cantor, che, senza di essa, non ci avrebbe creato il paradiso da cui Hilbert dice che nessuno deve scacciarci.

Bibliografia

1) Agostino, *La città di Dio (trad. di Luigi Alici),* Rusconi editore, Milano, 1997;
2) Bottazzini U., *Infinito,* Società editrice Il Mulino, Bologna, 2018;
3) Carruccio E., *Matematica e logica nella storia e nel pensiero contemporaneo*, Gheroni, Torino, 1958;
4) Carruccio E., *Appunti di storia delle matematiche, della logica e della metamatematica,* Pitagora editrice, bologna, 1977;
5) Reale G., *Storia della filosofia antica (vol I, II),* Vita e pensiero, Milano, 1991