Il tempo è reale : $t \in \mathbb{R}$

Enrico Miglierina

Dipartimento di Matematica per le Scienze Economiche, Finanziarie ed Attuariali
Università Cattolica del Sacro Cuore - Milano

October 6, 2023

Matematica senza tempo

- La matematica è senza tempo: un teorema valido rimane valido (a meno che si scopra un errore nella dimostrazione...)
- La matematica ha una storia (lunga, interessante e tortuosa...)

Matematica senza tempo

- La matematica è senza tempo: un teorema valido rimane valido (a meno che si scopra un errore nella dimostrazione...)
- La matematica ha una storia (lunga, interessante e tortuosa...)

Il tempo nei modelli matematici

La nozione di tempo (o meglio una variabile temporale), appare in molti ambiti dell'applicazione della matematica:

- **Fisica**: moto rettilineo uniforme $s = vt$ con $t \in \mathbb{R}$;
- **Finanza**: legge di capitalizzazione composta $M = (1 + i)^t$ con $t \in \mathbb{R}$;
- **Biologia**: Crescita di una popolazione $x'(t) = Kx(t)$ con $t \in \mathbb{R}$;
- ...
- ...

Metodi Matematici della Meccanica Classica - V.I. Arnold

B. **Struttura galileiana.** Una struttura spazio-temporale galileiana comprende i seguenti tre elementi:

1) L'*universo*, cioè uno spazio affine [1] quadridimensionale A^4. I punti di A^4 si chiamano *punti di universo* o *eventi*. I trasporti paralleli dell'universo A^4 costituiscono uno spazio lineare $\mathbf{R}^4$.

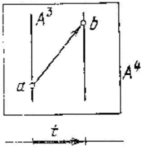


Fig. 2. L'intervallo di tempo t.

2) Il *tempo*, cioè un'applicazione lineare $t\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ dello spazio lineare dei trasporti paralleli dell'universo sull' «asse dei tempi» reale. L'*intervallo di tempo* tra l'evento $a \in A^4$ e l'evento $b \in A^4$ è il numero $t(b-a)$ (fig. 2). Se $t(b-a)=0$ gli eventi a e b si dicono *contemporanei*.

Un insieme di eventi contemporanei tra loro forma un sottospazio affine tridimensionale di A^4. Esso viene chiamato *spazio degli eventi contemporanei* A^3.

Il nucleo dell'applicazione t consiste nei trasporti paralleli di A^4, che portano un evento (e quindi ogni evento) in un evento ad esso contemporaneo. Questo nucleo forma uno spazio lineare tridimensionale $\mathbf{R}^3$, sottospazio dello spazio lineare $\mathbf{R}^4$.

Una struttura galileiana comprende ancora un elemento.

3) Una *distanza tra eventi contemporanei*,

$$\rho(a, b) = \|a-b\| = \sqrt{(a-b, a-b)}, \quad a, b \in A^3,$$

[1] Anticamente l'universo era fornito non di una struttura affine, ma lineare (sistema geocentrico + creazione dell'universo).

Prima dei numeri reali

Per parlare di numeri reali dobbiamo fare qualche passo indietro:

- **Numeri naturali** : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Numeri relativi: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}$,
- Numeri razionali:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} : n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N} \text{ con } m \neq 0 \right\}.$$

Prima dei numeri reali

Per parlare di numeri reali dobbiamo fare qualche passo indietro:

- **Numeri naturali** : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- **Numeri relativi**: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}$,
- Numeri razionali:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} : n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N} \text{ con } m \neq 0 \right\}.$$

Prima dei numeri reali

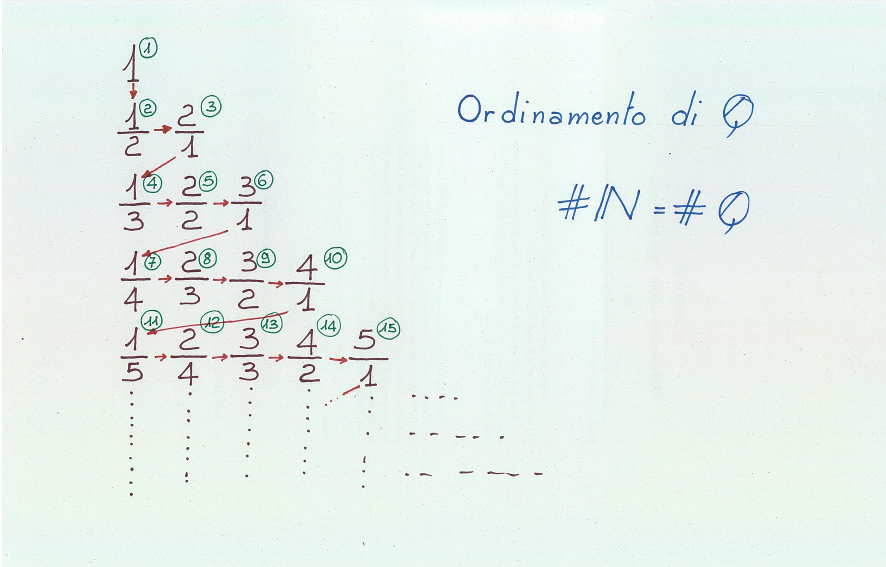
Per parlare di numeri reali dobbiamo fare qualche passo indietro:

- **Numeri naturali** : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- **Numeri relativi**: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}$,
- **Numeri razionali**:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} : n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N} \text{ con } m \neq 0 \right\}.$$

Due proprietà di $\mathbb{Q}$: la prima

I numeri razionali sono tanti quanti i numeri naturali (Cantor):



Due proprietà di $\mathbb{Q}$: la seconda

Dati due numeri razionali q_1 e q_2 qualsiasi esiste sempre un numero razionale q che sta tra i due numeri dati; in formule

$$\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \quad q_1 < q_2 \Longrightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : q_1 < q < q_2.$$

Ad esempio, se

$$q_1 = \frac{1}{4} < q_2 = \frac{1}{2}$$

considero

$$q = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{8}$$

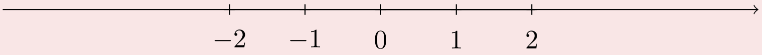
Qualche osservazione su $\mathbb{Q}$

- Le due proprietà di $\mathbb{Q}$ sembrano andare in due direzioni opposte:
  - la prima dice che in qualche modo i numeri razionali sono "pochi" e "discreti",
  - la seconda porta a pensare che i numeri razionali siano "densi".

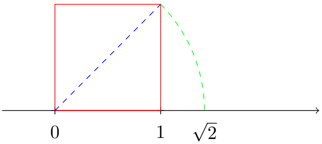
Corrispondenza con i punti della retta

Problema

Se considero una retta su cui è fissato un punto O (origine), e misuro la distanza di un punto qualunque da O (con la convenzione che a punti a destra di O associo la distanza con il segno $+$ e a sinistra di O con il segno $-$) bastano i numeri razionali per coprire tutta la retta?



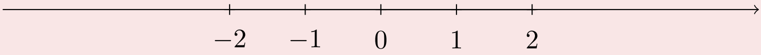
La risposta è NO: si pensi al punto in cui cade la proiezione della diagonale di un quadrato di lato 1.



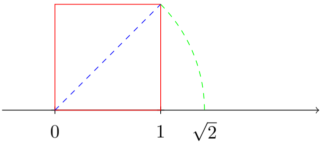
Corrispondenza con i punti della retta

Problema

Se considero una retta su cui è fissato un punto O (origine), e misuro la distanza di un punto qualunque da O (con la convenzione che a punti a destra di O associo la distanza con il segno $+$ e a sinistra di O con il segno $-$) bastano i numeri razionali per coprire tutta la retta?



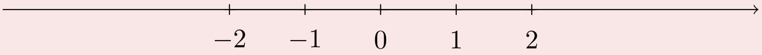
La risposta è NO: si pensi al punto in cui cade la proiezione della diagonale di un quadrato di lato 1.



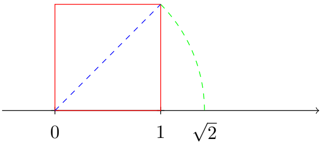
Corrispondenza con i punti della retta

Problema

Se considero una retta su cui è fissato un punto O (origine), e misuro la distanza di un punto qualunque da O (con la convenzione che a punti a destra di O associo la distanza con il segno $+$ e a sinistra di O con il segno $-$) bastano i numeri razionali per coprire tutta la retta?



La risposta è NO: si pensi al punto in cui cade la proiezione della diagonale di un quadrato di lato 1.



Il continuo dei numeri reali - versione classica

Per associare un numero ad ogni punto della retta abbiamo bisogno di un insieme di numeri più grande di $\mathbb{Q}$.

Sezione di Dedekind

Una *sezione di Dedekind* (A, B) è una ripartizione di *tutti* i razionali in due classi A e B tali che ogni numero in A sia minore di ogni numero in B.

Ad esempio:

$$A = \{q \in \mathbb{Q} : q \leq \pi\}, \quad B = \{q \in \mathbb{Q} : q > \pi\}$$

Numero reale

Si definisce numero reale α ogni sezione di Dedekind (A, B).

Ad esempio con A, B come sopra $(A, B) = \pi$.

Il continuo dei numeri reali - versione classica

Per associare un numero ad ogni punto della retta abbiamo bisogno di un insieme di numeri più grande di $\mathbb{Q}$.

Sezione di Dedekind

Una *sezione di Dedekind* (A, B) è una ripartizione di *tutti* i razionali in due classi A e B tali che ogni numero in A sia minore di ogni numero in B.

Ad esempio:

$$A = \{q \in \mathbb{Q} : q \leq \pi\}, \quad B = \{q \in \mathbb{Q} : q > \pi\}$$

Numero reale

Si definisce numero reale α ogni sezione di Dedekind (A, B).

Ad esempio con A, B come sopra $(A, B) = \pi$.

Il continuo dei numeri reali - versione classica

Per associare un numero ad ogni punto della retta abbiamo bisogno di un insieme di numeri più grande di $\mathbb{Q}$.

Sezione di Dedekind

Una *sezione di Dedekind* (A, B) è una ripartizione di *tutti* i razionali in due classi A e B tali che ogni numero in A sia minore di ogni numero in B.

Ad esempio:

$$A = \{q \in \mathbb{Q} : q \leq \pi\}, \quad B = \{q \in \mathbb{Q} : q > \pi\}$$

Numero reale

Si definisce numero reale α ogni sezione di Dedekind (A, B).

Ad esempio con A, B come sopra $(A, B) = \pi$.

Il continuo dei numeri reali - versione classica

Per associare un numero ad ogni punto della retta abbiamo bisogno di un insieme di numeri più grande di $\mathbb{Q}$.

Sezione di Dedekind

Una *sezione di Dedekind* (A, B) è una ripartizione di *tutti* i razionali in due classi A e B tali che ogni numero in A sia minore di ogni numero in B.

Ad esempio:

$$A = \{q \in \mathbb{Q} : q \leq \pi\}, \quad B = \{q \in \mathbb{Q} : q > \pi\}$$

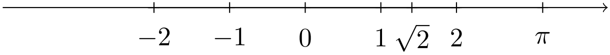
Numero reale

Si definisce numero reale α ogni sezione di Dedekind (A, B).

Ad esempio con A, B come sopra $(A, B) = \pi$.

Proprietà di $\mathbb{R}$- versione classica

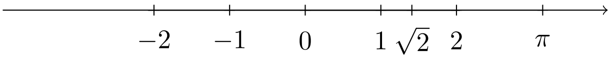
- Cantor dimostrò che $\mathbb{R}$ ha "molti più" elementi di $\mathbb{N}$ (e quindi anche di $\mathbb{Q}$),
- Ad ogni numero reale corrisponde un punto sulla retta e viceversa.



- Ogni punto della retta reale (e quindi ogni numero reale) è un oggetto individuato **completamente**.
- Di ogni numero reale è quindi dato per individuato completamente il suo sviluppo decimale (che può avere infinite cifre). Ad esempio: $\pi = 3,14159265358979323846\ldots$

Proprietà di $\mathbb{R}$- versione classica

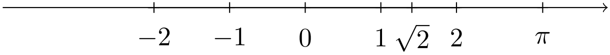
- Cantor dimostrò che $\mathbb{R}$ ha "molti più" elementi di $\mathbb{N}$ (e quindi anche di $\mathbb{Q}$),
- Ad ogni numero reale corrisponde un punto sulla retta e viceversa.



- Ogni punto della retta reale (e quindi ogni numero reale) è un oggetto individuato **completamente**.
- Di ogni numero reale è quindi dato per individuato completamente il suo sviluppo decimale (che può avere infinite cifre). Ad esempio: $\pi = 3,14159265358979323846\ldots$

Proprietà di $\mathbb{R}$- versione classica

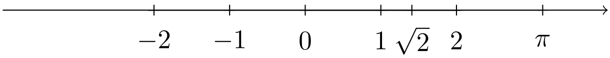
- Cantor dimostrò che $\mathbb{R}$ ha "molti più" elementi di $\mathbb{N}$ (e quindi anche di $\mathbb{Q}$),
- Ad ogni numero reale corrisponde un punto sulla retta e viceversa.



- Ogni punto della retta reale (e quindi ogni numero reale) è un oggetto individuato **completamente**.
- Di ogni numero reale è quindi dato per individuato completamente il suo sviluppo decimale (che può avere infinite cifre). Ad esempio: $\pi = 3,14159265358979323846\ldots$

Proprietà di $\mathbb{R}$- versione classica

- Cantor dimostrò che $\mathbb{R}$ ha “molti più” elementi di $\mathbb{N}$ (e quindi anche di $\mathbb{Q}$),
- Ad ogni numero reale corrisponde un punto sulla retta e viceversa.



- Ogni punto della retta reale (e quindi ogni numero reale) è un oggetto individuato **completamente**.
- Di ogni numero reale è quindi dato per individuato completamente il suo sviluppo decimale (che può avere infinite cifre). Ad esempio: $\pi = 3,14159265358979323846\ldots$

Due approcci diversi ai numeri reali (e alla matematica)

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966)

David Hilbert (1862-1943)

Continuo frammentato

- L'approccio ai numeri reali presentato sino ad ora costruisce un "continuo frammentato",
- questo approccio è risultato vincente in matematica (Hilbert),
- Viene però persa una proprietà intuitiva del continuo: l'essere "un fluire continuo e coeso" (come il tempo: "il tempo scorre, il fluire del tempo..."),
- Intuitivamente il continuo dovrebbe essere "viscoso": "non si può tagliare senza che qualcosa resti attaccato al coltello".

Continuo frammentato

- L'approccio ai numeri reali presentato sino ad ora costruisce un "continuo frammentato",
- questo approccio è risultato vincente in matematica (Hilbert),
- Viene però persa una proprietà intuitiva del continuo: l'essere "un fluire continuo e coeso" (come il tempo: "il tempo scorre, il fluire del tempo..."),
- Intuitivamente il continuo dovrebbe essere "viscoso": "non si può tagliare senza che qualcosa resti attaccato al coltello".

Continuo frammentato

- L'approccio ai numeri reali presentato sino ad ora costruisce un "continuo frammentato",
- questo approccio è risultato vincente in matematica (Hilbert),
- Viene però persa una proprietà intuitiva del continuo: l'essere "un fluire continuo e coeso" (come il tempo: "il tempo scorre, il fluire del tempo..."),
- Intuitivamente il continuo dovrebbe essere "viscoso": "non si può tagliare senza che qualcosa resti attaccato al coltello".

Continuo frammentato

- L'approccio ai numeri reali presentato sino ad ora costruisce un "continuo frammentato",
- questo approccio è risultato vincente in matematica (Hilbert),
- Viene però persa una proprietà intuitiva del continuo: l'essere "un fluire continuo e coeso" (come il tempo: "il tempo scorre, il fluire del tempo..."),
- Intuitivamente il continuo dovrebbe essere "viscoso": "non si può tagliare senza che qualcosa resti attaccato al coltello".

L'approccio intuizionista ai numeri reali

- Brouwer si oppose all'approccio di "continuo frammentato", dando origine ad un approccio diverso ai numeri reali e alla matematica in genere (matematica intuizionista).
- Per Brouwer, "la fluidità del continuo" era un' "intuizione matematica primitiva"
- Infatti Brouwer interpretò sempre la proprietà di continuità, non solo come un flusso, ma proprio come un cambiamento ed una crescita temporale (Posy, 2020)
- Questa sua idea portò ad un nuovo modo di vedere i numeri reali.

L'approccio intuizionista ai numeri reali

- Brouwer si oppose all'approccio di "continuo frammentato", dando origine ad un approccio diverso ai numeri reali e alla matematica in genere (matematica intuizionista).
- Per Brouwer, "la fluidità del continuo" era un' "intuizione matematica primitiva"
- Infatti Brouwer interpretò sempre la proprietà di continuità, non solo come un flusso, ma proprio come un cambiamento ed una crescita temporale (Posy, 2020)
- Questa sua idea portò ad un nuovo modo di vedere i numeri reali.

L'approccio intuizionista ai numeri reali

- Brouwer si oppose all'approccio di "continuo frammentato", dando origine ad un approccio diverso ai numeri reali e alla matematica in genere (matematica intuizionista).
- Per Brouwer, "la fluidità del continuo" era un' "intuizione matematica primitiva"
- Infatti Brouwer interpretò sempre la proprietà di continuità, non solo come un flusso, ma proprio come un cambiamento ed una crescita temporale (Posy, 2020)
- Questa sua idea portò ad un nuovo modo di vedere i numeri reali.

L'approccio intuizionista ai numeri reali

- Brouwer si oppose all'approccio di "continuo frammentato", dando origine ad un approccio diverso ai numeri reali e alla matematica in genere (matematica intuizionista).
- Per Brouwer, "la fluidità del continuo" era un' "intuizione matematica primitiva"
- Infatti Brouwer interpretò sempre la proprietà di continuità, non solo come un flusso, ma proprio come un cambiamento ed una crescita temporale (Posy, 2020)
- Questa sua idea portò ad un nuovo modo di vedere i numeri reali.

I numeri reali secondo Brouwer

- Sia $\{q_n\}_{n=0}^{\infty} = \{q_0, q_1, q_2, \dots\}$ una *successione infinita* di numeri razionali ($n \in \mathbb{N}$),
- La successione $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ è convergente quando gli elementi, al crescere di n, diventano sempre più vicini tra loro; in simboli

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \qquad |q_n - q_{n+m}| < 2^{-k};$$

- Ogni una successione convergente di razionali $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ (a meno di una relazione d'equivalenza) definisce un numero reale

- dal punto di vista classico questo approccio è del tutto equivalente alle sezioni di Dedekind, devo però guardare la successione $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dal suo punto di arrivo (∞),
- dal punto di vista intuizionista la successione è un *processo senza fine*, di cui ad ogni passo n si conoscono solo un numero finito di elementi $a_0, a_1, \dots, a_n$. Questo processo deve essere "afferrabile", meglio, implementabile in senso costruttivo.

I numeri reali secondo Brouwer

- Sia $\{q_n\}_{n=0}^{\infty} = \{q_0, q_1, q_2, \dots\}$ una *successione infinita* di numeri razionali ($n \in \mathbb{N}$),
- La successione $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ è convergente quando gli elementi, al crescere di n, diventano sempre più vicini tra loro; in simboli

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \qquad |q_n - q_{n+m}| < 2^{-k};$$

- Ogni una successione convergente di razionali $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ (a meno di una relazione d'equivalenza) definisce un numero reale

- dal punto di vista classico questo approccio è del tutto equivalente alle sezioni di Dedekind, devo però guardare la successione $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dal suo punto di arrivo (∞),
- dal punto di vista intuizionista la successione è un *processo senza fine*, di cui ad ogni passo n si conoscono solo un numero finito di elementi $a_0, a_1, \dots, a_n$. Questo processo deve essere "afferrabile", meglio, implementabile in senso costruttivo.

I numeri reali secondo Brouwer

- Sia $\{q_n\}_{n=0}^{\infty} = \{q_0, q_1, q_2, \dots\}$ una *successione infinita* di numeri razionali ($n \in \mathbb{N}$),
- La successione $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ è convergente quando gli elementi, al crescere di n, diventano sempre più vicini tra loro; in simboli

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \qquad |q_n - q_{n+m}| < 2^{-k};$$

- Ogni una successione convergente di razionali $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ (a meno di una relazione d'equivalenza) definisce un numero reale

- dal punto di vista classico questo approccio è del tutto equivalente alle sezioni di Dedekind, devo però guardare la successione $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dal suo punto di arrivo (∞),
- dal punto di vista intuizionista la successione è un *processo senza fine*, di cui ad ogni passo n si conoscono solo un numero finito di elementi $a_0, a_1, \dots, a_n$. Questo processo deve essere "afferrabile", meglio, implementabile in senso costruttivo.

I numeri reali secondo Brouwer

- Sia $\{q_n\}_{n=0}^{\infty} = \{q_0, q_1, q_2, \dots\}$ una *successione infinita* di numeri razionali ($n \in \mathbb{N}$),
- La successione $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ è convergente quando gli elementi, al crescere di n, diventano sempre più vicini tra loro; in simboli

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \qquad |q_n - q_{n+m}| < 2^{-k};$$

- Ogni una successione convergente di razionali $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ (a meno di una relazione d'equivalenza) definisce un numero reale

- dal punto di vista classico questo approccio è del tutto equivalente alle sezioni di Dedekind, devo però guardare la successione $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dal suo punto di arrivo (∞),
- dal punto di vista intuizionista la successione è un *processo senza fine*, di cui ad ogni passo n si conoscono solo un numero finito di elementi $a_0, a_1, \dots, a_n$. Questo processo deve essere "afferrabile", meglio, implementabile in senso costruttivo.

I numeri reali secondo Brouwer

- Sia $\{q_n\}_{n=0}^{\infty} = \{q_0, q_1, q_2, \dots\}$ una *successione infinita* di numeri razionali ($n \in \mathbb{N}$),
- La successione $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ è convergente quando gli elementi, al crescere di n, diventano sempre più vicini tra loro; in simboli

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \qquad |q_n - q_{n+m}| < 2^{-k};$$

- Ogni una successione convergente di razionali $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ (a meno di una relazione d'equivalenza) definisce un numero reale

- dal punto di vista classico questo approccio è del tutto equivalente alle sezioni di Dedekind, devo però guardare la successione $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dal suo punto di arrivo (∞),
- dal punto di vista intuizionista la successione è un *processo senza fine*, di cui ad ogni passo n si conoscono solo un numero finito di elementi $a_0, a_1, \dots, a_n$. Questo processo deve essere "afferrabile", meglio, implementabile in senso costruttivo.

Choice sequences

- I numeri reali possono essere introdotti a partire da quelle che Brouwer chiamò "successioni di scelta" (choice sequences)
- Una choice sequence σ è data da:
  - un numero razionale $\sigma(0)$,
  - da una legge che dati $\sigma(0), \ldots, \sigma(k)$ permetta di individuare in modo non ambiguo l'insieme $\Sigma(k+1)$ entro cui cadrà $\sigma(k+1)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$,
- Nell'insieme $\Sigma(k+1)$ il numero razionale $\sigma(k+1)$ viene scelto a caso (indeterminazione intrinseca)
- se pensiamo che al passo k, $\sigma(k)$ decida la k-esima cifra decimale di un numero reale α, al momento k conoscerò α con una precisione sino a 10^{-k}, passando al momento successivo, conoscerò la $(k+1)$-esima cifra decimale di α,e così via (riappare il tempo...).

Choice sequences

- I numeri reali possono essere introdotti a partire da quelle che Brouwer chiamò "successioni di scelta" (choice sequences)
- Una choice sequence σ è data da:
  - un numero razionale $\sigma(0)$,
  - da una legge che dati $\sigma(0), \ldots, \sigma(k)$ permetta di individuare in modo non ambiguo l'insieme $\Sigma(k+1)$ entro cui cadrà $\sigma(k+1)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$,
- Nell'insieme $\Sigma(k+1)$ il numero razionale $\sigma(k+1)$ viene scelto a caso (indeterminazione intrinseca)
- se pensiamo che al passo k, $\sigma(k)$ decida la k-esima cifra decimale di un numero reale α, al momento k conoscerò α con una precisione sino a 10^{-k}, passando al momento successivo, conoscerò la $(k+1)$-esima cifra decimale di α,e così via (riappare il tempo...).

Choice sequences

- I numeri reali possono essere introdotti a partire da quelle che Brouwer chiamò "successioni di scelta" (choice sequences)
- Una choice sequence σ è data da:
  - un numero razionale $\sigma(0)$,
  - da una legge che dati $\sigma(0),\ldots,\sigma(k)$ permetta di individuare in modo non ambiguo l'insieme $\Sigma(k+1)$ entro cui cadrà $\sigma(k+1)$ per ogni $k\in\mathbb{N}$,
- Nell'insieme $\Sigma(k+1)$ il numero razionale $\sigma(k+1)$ viene scelto a caso (indeterminazione intrinseca)
- se pensiamo che al passo k, $\sigma(k)$ decida la k-esima cifra decimale di un numero reale α, al momento k conoscerò α con una precisione sino a 10^{-k}, passando al momento successivo, conoscerò la $(k+1)$-esima cifra decimale di α,e così via (riappare il tempo...).

Choice sequences

- I numeri reali possono essere introdotti a partire da quelle che Brouwer chiamò "successioni di scelta" (choice sequences)
- Una choice sequence σ è data da:
  - un numero razionale $\sigma(0)$,
  - da una legge che dati $\sigma(0), \ldots, \sigma(k)$ permetta di individuare in modo non ambiguo l'insieme $\Sigma(k+1)$ entro cui cadrà $\sigma(k+1)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$,
- Nell'insieme $\Sigma(k+1)$ il numero razionale $\sigma(k+1)$ viene scelto a caso (indeterminazione intrinseca)
- se pensiamo che al passo k, $\sigma(k)$ decida la k-esima cifra decimale di un numero reale α, al momento k conoscerò α con una precisione sino a 10^{-k}, passando al momento successivo, conoscerò la $(k+1)$-esima cifra decimale di α,e così via (riappare il tempo...).

Un esempio

- sia $\sigma(0) = \frac{1}{2}$;
- dato $\sigma(k) \in \mathbb{Q}$, , si sceglie $\sigma(k+1) \in \mathbb{Q}$ tale che:

$$|\sigma(k+1) - \sigma(k)| \leq 2^{-(k+1)};$$

  (questa scelta dipende da k e da $\sigma(k)$);
- ci sono infinite scelte per $\sigma(k)$, ma una volta fissato, i valori $\sigma(k+1) \in \left[\sigma(k) - 2^{-(k+1)}, \sigma(k) + 2^{-(k+1)}\right]$.
- $\{\sigma(k)\}_{k=0}^{\infty}$ identifica un numero reale α. Ma,...

Un esempio

- sia $\sigma(0) = \frac{1}{2}$;
- dato $\sigma(k) \in \mathbb{Q}$, , si sceglie $\sigma(k+1) \in \mathbb{Q}$ tale che:

$$|\sigma(k+1) - \sigma(k)| \leq 2^{-(k+1)};$$

  (questa scelta dipende da k e da $\sigma(k)$);
- ci sono infinite scelte per $\sigma(k)$, ma una volta fissato, i valori $\sigma(k+1) \in \left[\sigma(k) - 2^{-(k+1)}, \sigma(k) + 2^{-(k+1)}\right]$.
- $\{\sigma(k)\}_{k=0}^{\infty}$ identifica un numero reale α. Ma,...

Un esempio

- sia $\sigma(0) = \frac{1}{2}$;
- dato $\sigma(k) \in \mathbb{Q}$, , si sceglie $\sigma(k+1) \in \mathbb{Q}$ tale che:

  $$|\sigma(k+1) - \sigma(k)| \leq 2^{-(k+1)};$$

  (questa scelta dipende da k e da $\sigma(k)$);
- ci sono infinite scelte per $\sigma(k)$, ma una volta fissato, i valori $\sigma(k+1) \in \left[\sigma(k) - 2^{-(k+1)}, \sigma(k) + 2^{-(k+1)}\right]$.
- $\{\sigma(k)\}_{k=0}^{\infty}$ identifica un numero reale α. Ma,...

Un esempio

- sia $\sigma(0) = \frac{1}{2}$;
- dato $\sigma(k) \in \mathbb{Q}$, , si sceglie $\sigma(k+1) \in \mathbb{Q}$ tale che:

  $$|\sigma(k+1) - \sigma(k)| \leq 2^{-(k+1)};$$

  (questa scelta dipende da k e da $\sigma(k)$);
- ci sono infinite scelte per $\sigma(k)$, ma una volta fissato, i valori $\sigma(k+1) \in \left[\sigma(k) - 2^{-(k+1)}, \sigma(k) + 2^{-(k+1)}\right]$.
- $\{\sigma(k)\}_{k=0}^{\infty}$ identifica un numero reale α. Ma,...

Un esempio

- ricordiamo che ad ogni *istante* k conosco solo $\sigma(1), \dots, \sigma(k)$ e che il numero α è un numero (reale) frutto di un processo senza fine;
- non è quindi possibile stabilire se

$$\alpha \leq \frac{1}{2} \qquad \text{o} \qquad \alpha > \frac{1}{2}.$$

Un esempio

- ricordiamo che ad ogni *istante* k conosco solo $\sigma(1), \ldots, \sigma(k)$ e che il numero α è un numero (reale) frutto di un processo senza fine;
- non è quindi possibile stabilire se

$$\alpha \leq \frac{1}{2} \qquad \text{o} \qquad \alpha > \frac{1}{2}.$$

Principio del terzo escluso (?)

- quanto detto sul numero α mostra come nell'approccio intuizionista non venga ritenuto valido il principio del terzo escluso

Principio del terzo escluso

Data una proposizione P:

$$P \vee \neg P$$

cioè, o vale P o vale "non P" (la negazione di P)

Questo fatto comporta che nella matematica intuizionista non valga $\neg\neg P \Rightarrow P$ e quindi che non valgano dimostrazioni per assurdo (matematica costruttiva - E. Bishop).

Principio del terzo escluso (?)

- quanto detto sul numero α mostra come nell'approccio intuizionista non venga ritenuto valido il principio del terzo escluso

Principio del terzo escluso

Data una proposizione P:

$$P \vee \neg P$$

cioè, o vale P o vale "non P" (la negazione di P)

Questo fatto comporta che nella matematica intuizionista non valga $\neg\neg P \Rightarrow P$ e quindi che non valgano dimostrazioni per assurdo (matematica costruttiva - E. Bishop).

Principio del terzo escluso (?)

- quanto detto sul numero α mostra come nell'approccio intuizionista non venga ritenuto valido il principio del terzo escluso

Principio del terzo escluso

Data una proposizione P:

$$P \vee \neg P$$

cioè, o vale P o vale "non P" (la negazione di P)

Questo fatto comporta che nella matematica intuizionista non valga $\neg\neg P \Rightarrow P$ e quindi che non valgano dimostrazioni per assurdo (matematica costruttiva - E. Bishop).

Continuo viscoso

- L'esistenza di numeri come α mostra come il continuo dei numeri reali sia "viscoso".
- Infatti, non è possibile tagliare con precisione il continuo reale in corrispondenza a $\frac{1}{2}$ (non è possibile stabilire se α stia sopra o sotto $\frac{1}{2}$).

Continuo viscoso

- L'esistenza di numeri come α mostra come il continuo dei numeri reali sia "viscoso".
- Infatti, non è possibile tagliare con precisione il continuo reale in corrispondenza a $\frac{1}{2}$ (non è possibile stabilire se α stia sopra o sotto $\frac{1}{2}$).

Continuo viscoso

- L'esistenza di numeri come α mostra come il continuo dei numeri reali sia "viscoso".
- Infatti, non è possibile tagliare con precisione il continuo reale in corrispondenza a $\frac{1}{2}$ (non è possibile stabilire se α stia sopra o sotto $\frac{1}{2}$).

I meccanismi di scelta nelle choice sequences

- Torniamo alla scelta al tempo k ...
  $\sigma(k+1) \in \left[\sigma(k) - 2^{-(k+1)}, \sigma(k) + 2^{-(k+1)}\right]$.
- Brouwer escogitò un interessante meccanismo di scelta di $\sigma(k+1)$ basato su un matematico idealizzato che sceglie, al tempo $k+1$, basandosi sull'aver dimostrato (o refutato) o non averlo fatto, la validità di una certa condizione, che al tempo k era ancora indecidibile.

I meccanismi di scelta nelle choice sequences

- Torniamo alla scelta al tempo k ...
  $\sigma(k+1) \in \left[\sigma(k) - 2^{-(k+1)}, \sigma(k) + 2^{-(k+1)}\right]$.
- Brouwer escogitò un interessante meccanismo di scelta di $\sigma(k+1)$ basato su un matematico idealizzato che sceglie, al tempo $k+1$, basandosi sull'aver dimostrato (o refutato) o non averlo fatto, la validità di una certa condizione, che al tempo k era ancora indecidibile.

Matematica intuizionista e fisica

- Recentemente, Nicolas Gisin ha suggerito che l'approccio alla matematica intuizionista, potrebbe aiutare a "parlare di fisica" in un modo nuovo, diverso da un linguaggio della matematica classica che porta ad una descrizione del mondo "timeless and deterministic".
- Il punto chiave del suo ragionamento tocca i meccanismi di scelta in una choice sequence: nella definizione di un numero reale
  - la scelta al tempo $k+1$ sarebbe dipendente da $\sigma(k)$ e da un elemento di casualità che Gisin vede come attributo della natura: "nature is intrinsically and fundamentally indeterministic"; in altre parole la natura fisica avrebbe la capacità di essere sorgente di numeri casuali.

Matematica intuizionista e fisica

- Recentemente, Nicolas Gisin ha suggerito che l'approccio alla matematica intuizionista, potrebbe aiutare a "parlare di fisica" in un modo nuovo, diverso da un linguaggio della matematica classica che porta ad una descrizione del mondo "timeless and deterministic".
- Il punto chiave del suo ragionamento tocca i meccanismi di scelta in una choice sequence: nella definizione di un numero reale
  - la scelta al tempo $k+1$ sarebbe dipendente da $\sigma(k)$ e da un elemento di casualità che Gisin vede come attributo della natura: "nature is intrinsically and fundamentally indeterministic"; in altre parole la natura fisica avrebbe la capacità di essere sorgente di numeri casuali.

Matematica intuizionista e fisica

- La critica di Gisin parte dall'osservazione che la rappresentazione mediante il concetto di numero reale classico (completamente individuato) di una grandezza fisica non sia strettamente necessaria e fedele.
- " Un'affermazione come 'una quantità x ha un valore completamente definito' (espressa da un numero reale e rappresentata da un punto nel continuo matematico) mi sembra non avere alcun significato fisico" (Max Born, *Physics in my generation*, 1969).
- proprio qui l'approccio intuizionista ai numeri reali potrebbe fornire un linguaggio appropriato:
  - un numero reale è un processo che si sviluppa nel *tempo*;
  - ad ogni *istante* si ha solo un'informazione finita.
- Gisin non propone di abbandonare la matematica classica, ma suggerisce che il suo uso non deve comportare il credere che "i numeri reali sono realmente reali".

Matematica intuizionista e fisica

- La critica di Gisin parte dall'osservazione che la rappresentazione mediante il concetto di numero reale classico (completamente individuato) di una grandezza fisica non sia strettamente necessaria e fedele.
- " Un'affermazione come 'una quantità x ha un valore completamente definito' (espressa da un numero reale e rappresentata da un punto nel continuo matematico) mi sembra non avere alcun significato fisico" (Max Born, *Physics in my generation*, 1969).
- proprio qui l'approccio intuizionista ai numeri reali potrebbe fornire un linguaggio appropriato:
  - un numero reale è un processo che si sviluppa nel *tempo*;
  - ad ogni *istante* si ha solo un'informazione finita.
- Gisin non propone di abbandonare la matematica classica, ma suggerisce che il suo uso non deve comportare il credere che "i numeri reali sono realmente reali".

Matematica intuizionista e fisica

- La critica di Gisin parte dall'osservazione che la rappresentazione mediante il concetto di numero reale classico (completamente individuato) di una grandezza fisica non sia strettamente necessaria e fedele.
- " Un'affermazione come 'una quantità x ha un valore completamente definito' (espressa da un numero reale e rappresentata da un punto nel continuo matematico) mi sembra non avere alcun significato fisico" (Max Born, *Physics in my generation*, 1969).
- proprio qui l'approccio intuizionista ai numeri reali potrebbe fornire un linguaggio appropriato:
  - un numero reale è un processo che si sviluppa nel *tempo*;
  - ad ogni *istante* si ha solo un'informazione finita.
- Gisin non propone di abbandonare la matematica classica, ma suggerisce che il suo uso non deve comportare il credere che "i numeri reali sono realmente reali".

Matematica intuizionista e fisica

- La critica di Gisin parte dall'osservazione che la rappresentazione mediante il concetto di numero reale classico (completamente individuato) di una grandezza fisica non sia strettamente necessaria e fedele.
- " Un'affermazione come 'una quantità x ha un valore completamente definito' (espressa da un numero reale e rappresentata da un punto nel continuo matematico) mi sembra non avere alcun significato fisico" (Max Born, *Physics in my generation*, 1969).
- proprio qui l'approccio intuizionista ai numeri reali potrebbe fornire un linguaggio appropriato:
  - un numero reale è un processo che si sviluppa nel *tempo*;
  - ad ogni *istante* si ha solo un'informazione finita.
- Gisin non propone di abbandonare la matematica classica, ma suggerisce che il suo uso non deve comportare il credere che "i numeri reali sono realmente reali".

Matematica intuizionista e fisica

- La critica di Gisin parte dall'osservazione che la rappresentazione mediante il concetto di numero reale classico (completamente individuato) di una grandezza fisica non sia strettamente necessaria e fedele.
- " Un'affermazione come 'una quantità x ha un valore completamente definito' (espressa da un numero reale e rappresentata da un punto nel continuo matematico) mi sembra non avere alcun significato fisico" (Max Born, *Physics in my generation*, 1969).
- proprio qui l'approccio intuizionista ai numeri reali potrebbe fornire un linguaggio appropriato:
  - un numero reale è un processo che si sviluppa nel *tempo*;
  - ad ogni *istante* si ha solo un'informazione finita.
- Gisin non propone di abbandonare la matematica classica, ma suggerisce che il suo uso non deve comportare il credere che "i numeri reali sono realmente reali".

Matematica intuizionista e fisica

- La critica di Gisin parte dall'osservazione che la rappresentazione mediante il concetto di numero reale classico (completamente individuato) di una grandezza fisica non sia strettamente necessaria e fedele.
- " Un'affermazione come 'una quantità x ha un valore completamente definito' (espressa da un numero reale e rappresentata da un punto nel continuo matematico) mi sembra non avere alcun significato fisico" (Max Born, *Physics in my generation*, 1969).
- proprio qui l'approccio intuizionista ai numeri reali potrebbe fornire un linguaggio appropriato:
  - un numero reale è un processo che si sviluppa nel *tempo*;
  - ad ogni *istante* si ha solo un'informazione finita.
- Gisin non propone di abbandonare la matematica classica, ma suggerisce che il suo uso non deve comportare il credere che "i numeri reali sono realmente reali".

Matematica intuizionista e fisica

13364 Synthese (2021) 199:13345–13371

Table 1 This table illustrates the close connections between the physicist's intuition about indeterminism in nature and the mathematics of intuitionism

	Indeterministic physics	Intuitionistic mathematics
1	Past, present and future are **not** all given at once	Real numbers are **not** all given at once
2	Time passes	Numbers are processes
3	Indeterminacy	Numbers can contain only finite information
4	Experiencing	Intuitionism rests on grasping objects
5	The present is thick	The continuum is viscous
6	Becoming	Choice sequences
7	The future is open	No law of the excluded middle (a proposition about the future can be neither true nor false)

Adapted from Gisin (2020a)

da N. Gisin. Indeterminism in physics and intuitionistic mathematics. *Synthese* ***199*** (2021) 13345-13371.

Qualche indicazione bibliografica

- N. Gisin. Mathematical languages shape our understanding of time in physics. *Nature Physics* **20** (2020) 114-119.
- N. Gisin. Indeterminism in physics and intuitionistic mathematics. *Synthese* ***199*** (2021) 13345-13371.
- C.J. Posy. Mathematical intuitionism. Cambridge University Press (2020).
- C.J. Posy. Intuitionism and philosophy. In: S. Shapiro (ed.) The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic. Oxford University Press (2005), 318-355.
- N. Wolchover. Does Time Really Flow? New Clues Come From a Century-Old Approach to Math. *Quanta Magazine*. www.quantamagazine.org (April 7, 2020).

Qualche indicazione bibliografica

- N. Gisin. Mathematical languages shape our understanding of time in physics. *Nature Physics* **20** (2020) 114-119.
- N. Gisin. Indeterminism in physics and intuitionistic mathematics. *Synthese* ***199*** (2021) 13345-13371.
- C.J. Posy. Mathematical intuitionism. Cambridge University Press (2020).
- C.J. Posy. Intuitionism and philosophy. In: S. Shapiro (ed.) The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic. Oxford University Press (2005), 318-355.
- N. Wolchover. Does Time Really Flow? New Clues Come From a Century-Old Approach to Math. *Quanta Magazine*. www.quantamagazine.org (April 7, 2020).