Pitagora e i **rapporti** tra matematica e musica

a cura di Alessandro Musesti

Università Cattolica del Sacro Cuore, Brescia

Milano, 25 maggio 2023

Legami tra matematica e musica

- intonazione
- costruzione di strumenti (meccanica)
- notazione
- astrazione
- produzione del suono (fisica)
- ritmo e tempo
- melodia
- armonia
- forma

Legami tra matematica e musica

- intonazione

Nicomaco di Gerasa: Manuale di armonica, I sec.

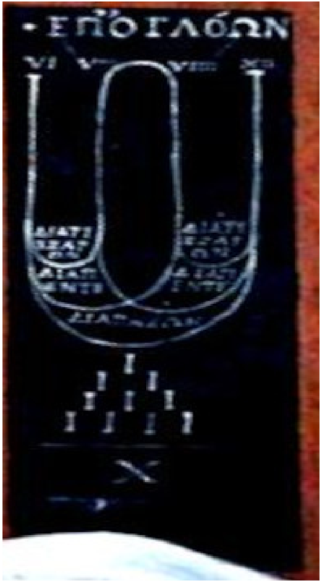
[Pitagora] passeggiando nei pressi di una bottega di un fabbro [. . .] si accorse che la percussione di diversi martelli sul ferro dell'incudine produceva suoni tra loro armonici [. . .] Egli riconobbe in questi suoni la consonanza dell'ottava, la quinta e la quarta. Ma egli percepì che l'intervallo tra la quarta e la quinta era dissonante, e tuttavia complementare alla maggiore di queste due consonanze. Euforico, [. . .] si precipitò nella bottega del fabbro e trovò attraverso vari esperimenti che la differenza del suono era dovuta al peso dei martelli e non alla forza dei colpi, né alle forme dei martelli, né alla omogeneità del ferro lavorato.

[Pitagora] trovò che le corde tese dal peso maggiore, comparandole con quelle tese dal peso minore, producevano un'ottava. Il peso su una corda era il doppio dell'altra. Quindi il rapporto di 2:1 produceva l'ottava. Ed ancora trovò che la corda avente la tensione massima comparata con quella vicina alla corda con tensione minima, produceva una quinta. In questo modo scoprì che la corda si trovava in rapporto emiolio [3:2] con la corda sottoposta a tensione massima, lo stesso rapporto che avevano i pesi corrispondenti.

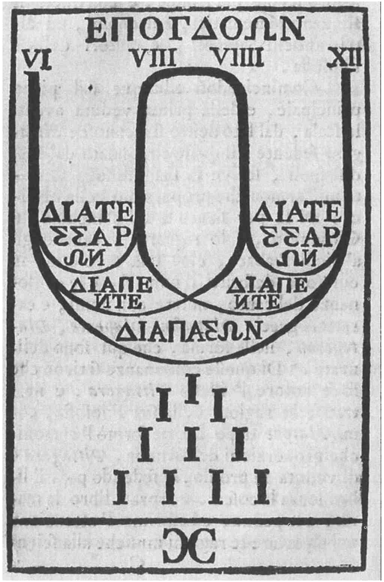
Pitagora: "Tutto è numero"

Pitagora: "Tutto è numero"

Pitagora: “Tutto è numero”

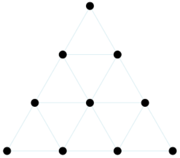


Pitagora: "Tutto è numero"



La scala pitagorica (maggiore)

nota	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do_2
rapporto	$\frac{1}{1}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	$\frac{2}{1}$



In questa scala, un semitono *non* è la metà di un tono:

Semitono: $\frac{2}{1} : \frac{243}{128} = \frac{4}{3} : \frac{81}{64} = \frac{256}{243} = \frac{2^8}{3^5}$ Due semitoni: $\left(\frac{2^8}{3^5}\right)^2 = \frac{2^{16}}{3^{10}}$ Tono: $\frac{9}{8}$

$$\frac{\text{Tono}}{\text{Due semitoni}} = \frac{9}{8} \cdot \frac{3^{10}}{2^{16}} = \frac{3^{12}}{2^{19}}$$ **comma pitagorico**

Circolo delle quinte - Scala cromatica

Do - Sol - Re - La - Mi - Si - Sol♭ - Re♭ - La♭ - Mi♭ - Si♭ - Fa - Do

Do_1 - Sol_1 - Re_2 - La_2 - Mi_3 - Si_3 - $Sol\flat_4$ - $Re\flat_5$ - $La\flat_5$ - $Mi\flat_6$ - $Si\flat_6$ - Fa_7 - Do_8

Il comma pitagorico

Quindi

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 2^7 \quad \Rightarrow \quad 3^{12} \approx 2^{19} \quad \Rightarrow \quad 531441 \approx 524288$$

Il rapporto

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288} \approx 1,01364326$$

Corrisponde a poco più di $1/9$ di un tono attuale.

La scala naturale

Mira a semplificare i rapporti e a privilegiare le terze maggiori:

nota	do	re	mi	fa	sol	la	si	do
rapporto	$\frac{1}{1}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{2}{1}$

La differenza tra la terza pitagorica e la terza naturale è

$$\frac{81}{64} : \frac{5}{4} = \frac{81}{80} \approx 1,0125 \quad \textbf{comma sintonico}$$

Il temperamento di Werckmeister I

Andreas Werckmeister(1645–1706) ha l'idea di "distribuire equamente" il comma pitagorico lungo alcuni intervalli del circolo delle quinte.

Il suo più famoso temperamento distribuiva il comma pitagorico in parti uguali tra le quinte Do-Sol, Sol-Re, Re-La, Si-Fa$\sharp$.

do$\sharp$	re	re$\sharp$	mi	fa	fa$\sharp$	sol	sol$\sharp$	la	si$\flat$	si
$\frac{256}{243}$	$\frac{64}{81}\sqrt{2}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{256}{243}\sqrt[4]{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1024}{729}$	$\frac{8}{9}\sqrt[4]{8}$	$\frac{128}{81}$	$\frac{1024}{729}\sqrt[4]{2}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{128}{81}\sqrt[4]{2}$

Con questa scala gli intervalli tra i semitoni non sono tutti uguali, quindi il cambio di tonalità cambia anche (leggermente) la scala. Però finalmente è possibile suonare decentemente in ogni tonalità!

Altre soluzioni al problema

Se si vogliono mettere d'accordo la quinta e l'ottava, ovvero i rapporti 3/2 e 2, si ha il problema di quante quinte comporre per ottenere un multiplo dell'ottava, ovvero trovare p, q tali che

$$\left(\frac{3}{2}\right)^p = 2^q \quad \Rightarrow \quad p/q = \log_2(3/2)$$

Ma si può dimostrare che $\log_2(3/2)$ non è un numero razionale, quindi andando per quinte non si raggiungerà mai un multiplo dell'ottava.
Però ci sono delle frazioni che approssimano tale numero meglio di altre:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53}, \ldots$$

$$\log_2(3/2) = 0,584962500721 \qquad 7/12 = 0{,}58\overline{3}$$
$$24/41 = 0{,}\overline{58536} \qquad 31/53 = 0{,}\overline{5849056603773}$$

La scala con 53 note è stata usata in passato (Nicolaus Mercator, XVII sec.): ci vogliono 31 di queste note per ottenere una quinta.

L'attualità: il temperamento equabile

Il numero magico è

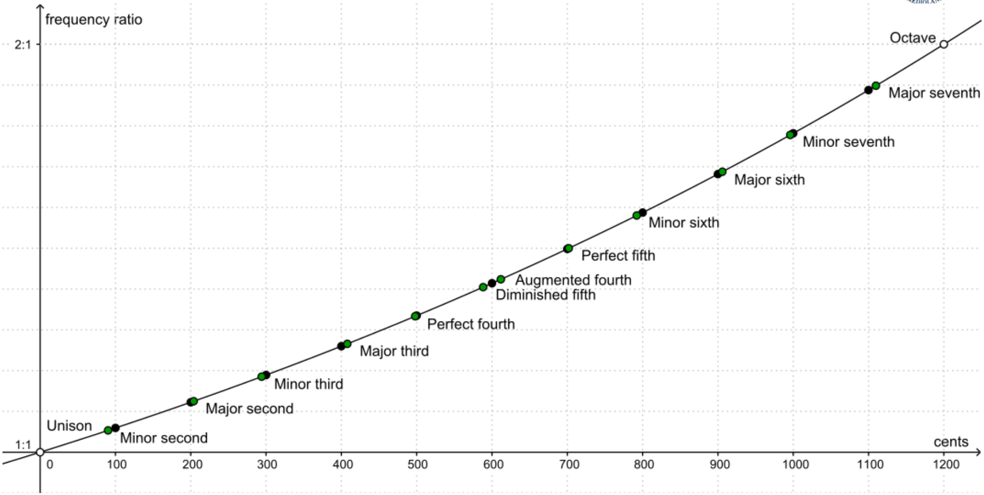
$$2^{1/12} = \sqrt[12]{2} \approx 1,059463094359$$

che corrisponde a un semitono.

La composizione di 12 semitoni dà esattamente 2, ovvero l'ottava

do$\sharp$	re	re$\sharp$	mi	fa	fa$\sharp$	sol	sol$\sharp$	la	si$\flat$	si
$2^{1/12}$	$2^{1/6}$	$2^{1/4}$	$2^{1/3}$	$2^{5/12}$	$\sqrt{2}$	$2^{7/12}$	$2^{2/3}$	$2^{3/4}$	$2^{5/6}$	$2^{11/12}$

Confronto fra intonazioni



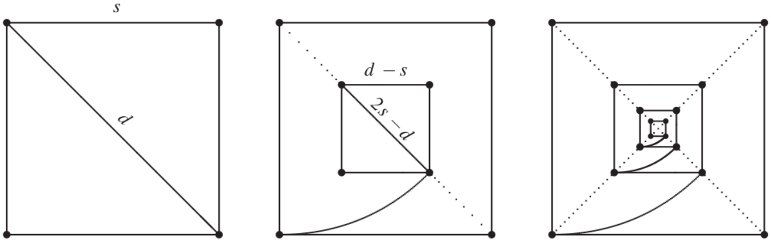
Da Wikipedia: confronto tra scala pitagorica (verde) e scala temperata (nera)

Incommensurabilità di $\sqrt{2}$: Ippaso da Metaponto

Proof Without Words: $\sqrt{2}$ Is Irrational

GRANT CAIRNS
La Trobe University
Melbourne, Australia 3086
G.Cairns@latrobe.edu.au

The side length and diagonal are incommensurable.

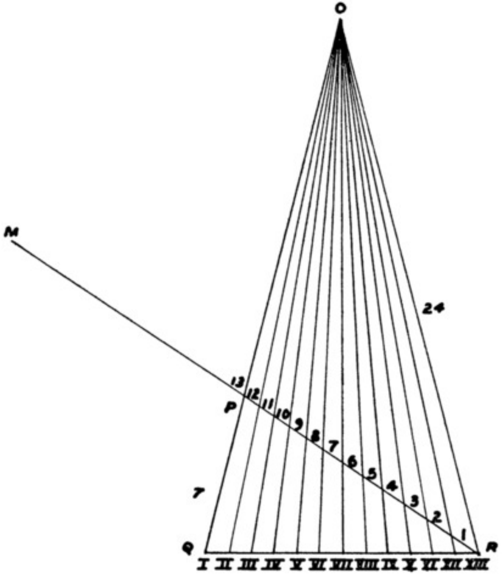


Math. Mag. **85** (2012) 123. doi:10.4169/math.mag.85.2.123. © Mathematical Association of America

Legami tra matematica e musica

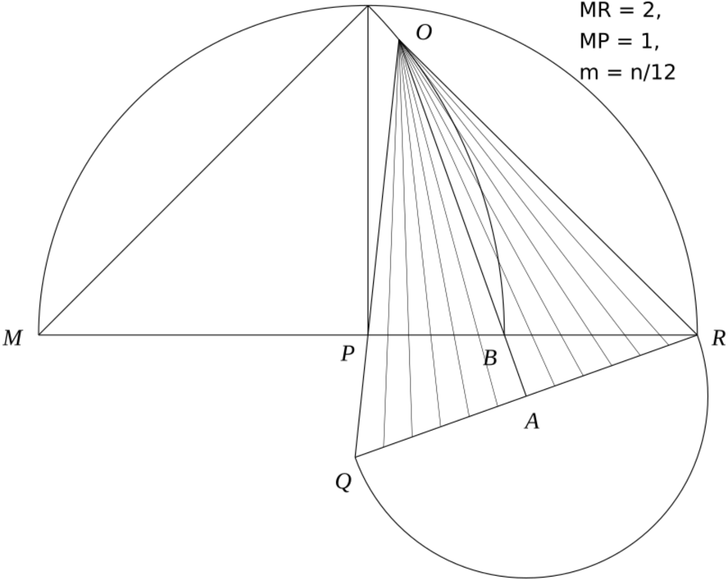
- intonazione
- costruzione di strumenti (meccanica)

1743: la costruzione di Stråhle per il liuto



$RQ = 12$
$OR = OQ = 24$
$QP = 7$
$MP = PR$

1957: la costruzione di Barbour



Legami tra matematica e musica

- intonazione
- costruzione di strumenti (meccanica)
- notazione

È una conquista medievale:

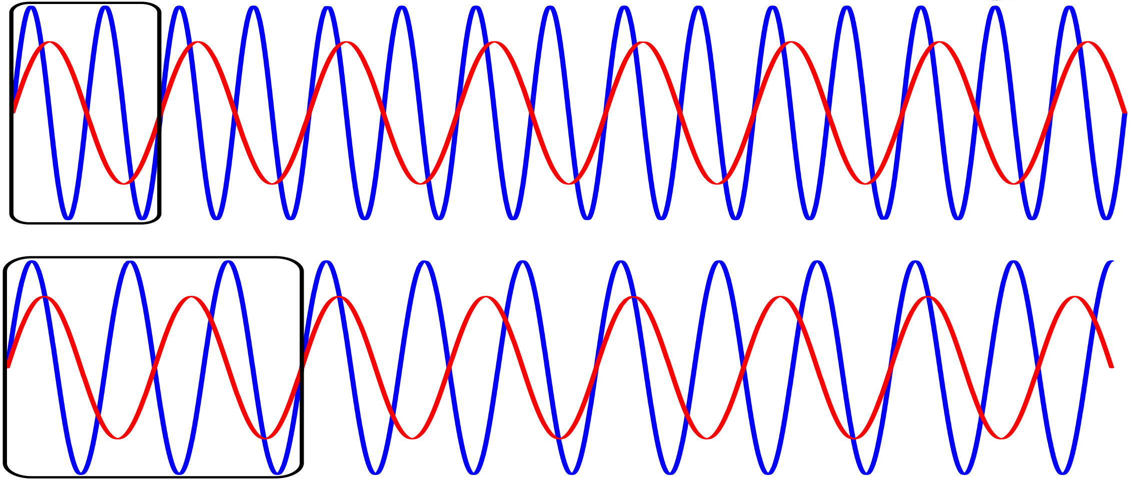
Tetragramma (Guido d'Arezzo, XI sec.), Pentagramma (Ugolino da Orvieto, XV sec.)

Cifre arabe (al-Khwārizmī, tradotto nel XII sec., Leonardo Fibonacci XIII sec.)

Legami tra matematica e musica

- intonazione
- costruzione di strumenti (meccanica)
- notazione
- astrazione
- produzione del suono (fisica)

L'onda sonora: intervallo di ottava e di quinta



Alcuni fatti

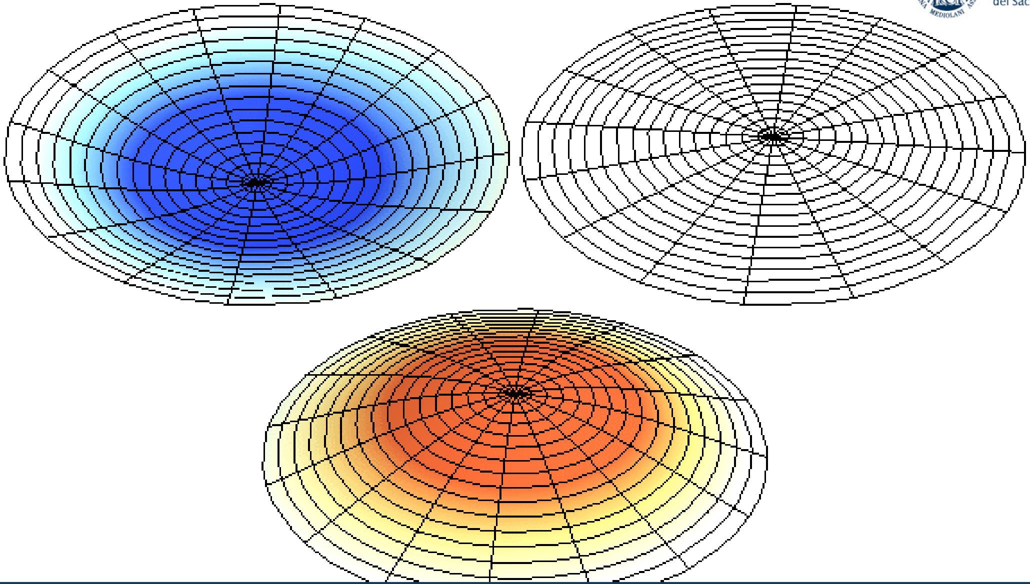
- Gli strumenti occidentali sono (quasi) tutti monodimensionali: corde, fiati
- L'ottava ha senso per le onde monodimensionali
- L'onda sinusoidale è privilegiata: equazione dell'elasticità lineare, serie di Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big)$$

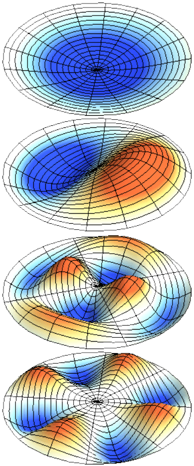
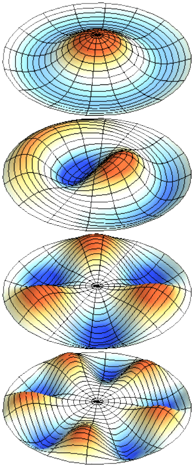
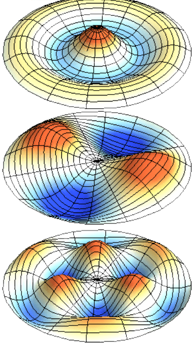
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

- Gli strumenti a percussione sono radicalmente diversi

Strumenti bidimensionali



Modi bidimensionali

link

Legami tra matematica e musica

- intonazione
- costruzione di strumenti (meccanica)
- notazione
- astrazione
- produzione del suono (fisica)
- ritmo e tempo
- melodia

2020: copyright su tutte le melodie possibili?

UNIVERSITÀ CATTOLICA del Sacro Cuore

Damien Riehl & Noah Rubin (allthemusic.info)

$$8^{12} = 68\,719\,476\,736$$

Legami tra matematica e musica

- intonazione
- costruzione di strumenti (meccanica)
- notazione
- astrazione
- produzione del suono (fisica)
- ritmo e tempo
- melodia
- armonia

da Do a	Do	Mi$\flat$	Mi	Fa	Sol	La$\flat$	La	Do$_2$
rapporto	$\frac{1}{1}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{1}$

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \to \frac{a+c}{b+d}$$

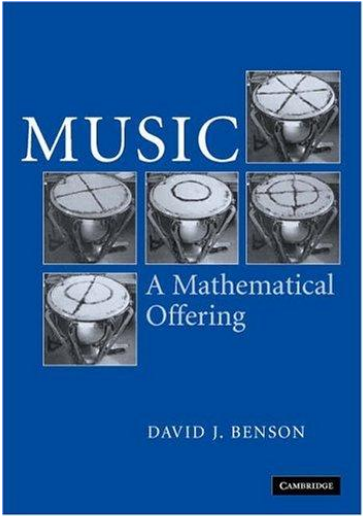
Legami tra matematica e musica

- intonazione
- costruzione di strumenti (meccanica)
- notazione
- astrazione
- produzione del suono (fisica)
- ritmo e tempo
- melodia
- armonia
- forma

Coxeter: un confronto tra teorema e forma-sonata

Question: Are all numbers rational?	*Introduction* ("generally in slower tempo")[8]
THEOREM: The square root of two is irrational; in other words: There are no whole numbers a and b such that the square of a/b is equal to 2.	EXPOSITION: *First Subject*
Remark: If such integers a and b do exist, we can assume, without loss of generality, that their greatest common divisor (a, b) is 1.	*Transition*
LEMMA: If n^2 is even, n itself is even.	*Second Subject* ("always consisting of more than one section")
Proof of Lemma: If n were odd, its square would be odd. In detail, if $n = 2m + 1$, then $n^2 = (2m + 1)^2 = 4m(m + 1) + 1$, which is odd.	
PROOF OF THEOREM: Suppose, if possible, that $(a/b)^2 = 2$, where $(a, b) = 1$. Then $a^2 = 2b^2$, $\therefore a^2$ is even. By the Lemma, a itself is even, say $a = 2c$. Then	DEVELOPMENT or *Free Fantasia* ("consisting partly of new episodes . . . and mainly of phrases from the Exposition")
$2b^2 = a^2 = (2c)^2 = 4c^2$, $\therefore b^2 = 2c^2$, $\therefore b^2$ is even.	["$a^2 = 2b^2$" in another key!]
By the Lemma again, b itself is even.	["a is even" in another key!]
We began by assuming that $(a/b)^2 = 2$, where $(a, b) = 1$.	[Repeating the first phrase of the Development]
We have deduced that a and b are even, so that they have a common factor 2 (or possibly greater than 2).	
This contradicts our assumption that $(a, b) = 1$.	[The climax]
Therefore such numbers a and b do not exist.	RECAPITULATION ("The material presented is, roughly speaking, . . . that of the Exposition.")
In other words, $\sqrt{2}$ is irrational.	CODA ("summing up the movement by a final assertion of the tonic key")

Bibliografia



Bibliografia

- H. S. M. Coxeter, *Music and mathematics*, The Mathematics Teacher, 61 (1968), pp. 312-320
- I. J. Schoenberg, *On the Location of the Frets on the Guitar*, The American Mathematical Monthly, Vol. 83 (1976), No. 7, pp. 550-552
- D. Benson, *Music: A Mathematical Offering*, Cambridge University Press 2006
- D. Riehl & N, Rubin, http://allthemusic.info (2020)
- F. Talamucci, *La matematica armonia dei suoni naturali. Ovvero, l'armonica matematica dei suoni naturali*, Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, 7 (2022), pp. 135-158
- F. Bellissima, *La scala musicale: Una storia tra matematica e filosofia*, Carocci 2022