BLAISE PASCAL

PENSIERI

E ALTRI SCRITTI DI E SU PASCAL

EDIZIONI PAOLINE

Infinito. Niente[24]. - La nostra anima è immessa nel corpo, dove trova numero, tempo e dimensioni. Essa ragiona su queste cose e chiama tutte queste cose natura, necessità, e non può credere altro.

L'unità aggiunta all'infinito non l'accresce di niente, non più di un centimetro aggiunto a una misura infinita. Il finito s'annienta di fronte all'infinito e diventa un puro niente. Così il nostro spirito davanti a Dio, così la nostra giustizia davanti alla giustizia divina. Non c'è tra la nostra giustizia e quella di Dio una sproporzione così grande come tra l'unità e l'infinito. La giustizia di Dio dev'essere enorme come la sua misericordia. Orbene, la giustizia verso i dannati è meno enorme e deve impressionare meno della misericordia verso gli eletti.

Noi sappiamo che c'è un infinito e ne ignoriamo la natura. Poiché sappiamo che è falso che i numeri sono finiti, è vero dunque che c'è un infinito nel numero. Ma non sappiamo che cosa è; è falso che sia pari; è falso che sia dispari; infatti, aggiungendo l'unità non cambia natura; tuttavia è un numero e ogni numero è pari o dispari (e questo veramente s'intende detto di ogni numero finito), così si può conoscere che c'è un Dio senza sapere che cos'è.

Vedendo tante cose vere che non sono la stessa verità, possiamo concludere che non esiste una verità sostanziale?

Noi dunque conosciamo l'esistenza e la natura del finito, perché siamo finiti ed estesi come lui. Conosciamo l'esistenza dell'infinito e ignoriamo la sua natura, perché ha estensione come noi ma non ha confini come noi. Ma non conosciamo né l'esistenza né la natura di Dio, perché non ha né estensione né confini[25]. Però me-

[24] Nell'edizione di Port-Royal questo frammento è posto al capitolo VII sotto il titolo: « È più vantaggioso credere che non credere quel che insegna la religione cristiana ». È il famoso frammento del *pari*.

[25] Sebbene questa affermazione di Pascal abbia un sapore fideistico, altrove egli ammette la possibilità per un pagano o per un deista di conoscere l'esistenza di Dio. Notare che la conoscenza di cui parla Pascal è quella per *esperienza* o per *estensione*; in questo senso Dio è inconoscibile o conoscibile per approssimazione (cfr. VALENSIN, in *Recherches de science réligieuse*, gennaio-marzo 1921, pagg. 91-98). Quanto alle prove metafisiche dell'esistenza di Dio cfr. nota al frammento 543. Inoltre, qui il ragionamento di Pascal è polemico e prende di petto l'ateo che nega la stessa esistenza di Dio.

diante la fede conosciamo la sua esistenza; mediante la gloria conosceremo la sua natura. Orbene ho già dimostrato che si può conoscere l'esistenza di una cosa, senza conoscere la sua natura.

Parliamo adesso secondo i lumi naturali.

Se c'è un Dio, egli è infinitamente incomprensibile, perché, non possedendo né parti né limiti, non ha alcuna proporzione con noi. Noi dunque siamo incapaci di conoscere non solo ciò che egli è ma anche se è. Ciò posto, chi oserebbe accingersi a risolvere questo problema? Non certo noi, che non abbiamo alcuna proporzione con lui.

Chi dunque biasimerà i cristiani di non poter dar ragione della loro credenza, essi che professano una religione di cui non possono dar ragione? Esponendola al mondo, essi dichiarano che la loro religione è una stoltezza, *stultitiam*; e poi vi lamentate che non la provano! Se la provassero, non manterrebbero la parola; proprio mancando di prove essi non mancano di fiuto.

— Sì, ma se questo scusa coloro che la presentano come tale e toglie loro il biasimo di presentarla senza darne ragione, non scusa coloro che la ricevono.

— Esaminiamo allora questo punto e cominciamo col dire: « Dio esiste oppure non esiste ». Da che parte ci decideremo? La ragione non può decidere nulla [26]; c'è di mezzo un caos infinito. Si giuoca una partita, all'estremità di questa distanza infinita, dove risulterà capo o croce. Su che cosa puntare? Secondo ragione, non potete scegliere né l'uno né l'altra; secondo ragione, non potete escludere nessuno dei due. Dunque non accusate di falsità coloro che hanno fatto una scelta, perché non ne sapete niente.

— No, ma io li biasimo d'aver fatto non già questa scelta, ma una scelta; perché se tanto colui che sceglie croce quanto l'altro incorrono in un errore analogo, sono sempre tutti e due in errore: la cosa migliore è di non scommettere.

— Sì, ma bisogna scommettere. Questa non è una cosa volontaria: voi siete imbarcato. Quale dei due sceglierete? Vediamo. Poiché bisogna scegliere, vediamo ciò che vi interessa meno. Voi avete da perdere due cose: il vero e il bene, e due cose da impegnare:

[26] Pascal discute con un incredulo, che non ammette prove razionali. Come già prima, concede il fatto all'avversario ma per impegnarlo nella « scommessa », vale a dire in una scelta della ragione (« siamo imbarcati » o »incastrati »).

la vostra ragione e la vostra volontà, la vostra conoscenza e la vostra beatitudine; e la vostra natura ha due cose da fuggire: l'errore e la miseria. La vostra ragione non riceve maggior danno scegliendo l'uno piuttosto che l'altro, perché bisogna necessariamente scegliere. Ecco un punto assodato. Ma la vostra beatitudine? Valutiamo il guadagno e la perdita, scegliendo croce, cioè l'esistenza di Dio. Esaminiamo questi due casi: se guadagnate, guadagnate tutto; se perdete, non perdete nulla. Scommettete dunque che egli esiste, senza esitare.

— Magnifico! Sì, bisogna scommettere; ma forse io scommetto troppo.

— Vediamo. Poiché c'è uguale probabilità di guadagno o di perdita, se aveste da guadagnare soltanto due vite per una, potreste ancora scommettere; ma se ci fossero da guadagnare tre vite, dovreste giocare (perché siete nella necessità di giocare), e sareste imprudente, se, costretto a giocare, non arrischiaste la vostra vita per guadagnarne tre in un gioco in cui c'è uguale probabilità di perdita o di guadagno. Ma c'è un'eternità di vita e di felicità. E così stando le cose, qualora ci fosse un'infinità di probabilità ci cui una sola fosse a vostro favore, avreste ancora motivo di scommettere uno per guadagnare due [27]; e agireste con scarso giudizio se, obbligato a giocare, vi rifiutaste di giocare una vita contro tre [28] in un gioco in cui tra un'infinità di probabilità ce n'è una per voi, nel caso che ci fosse una vita infinita infinitamente felice da guadagnare. Ma qui c'è proprio una vita infinita infinitamente felice da guadagnare, una probabilità di vincita contro un numero finito di probabilità di perdita, e quello che voi mettete in gioco è finito. Questo toglie ogni incertezza; sempre che c'è l'infinito in gioco e sempre che non vi sia infinità di rischi di perdita contro la probabilità del guadagno, non c'è da stare a fare il pari e il dispari, bisogna dar tutto. E così, quando si è costretti a giocare, bisogna rinunziare alla ragione per conservare la vita piuttosto che arrischiarla per il guadagno infinito così facile a venire quanto la perdita del nulla.

Perché non serve a niente dire che è incerto se si guadagnerà e che è certo che s'arrischia, e che l'infinita distanza tra la *certezza* di ciò

[27] Scommettere la propria vita terrena per un'eternità di vita e un'eternità di felicità.

[28] Un'eternità di vita, un'eternità di felicità, e queste due d'una qualità infinita.

che si rischia e l'*incertezza* di ciò che si guadagnerà uguaglia il bene finito, che s'arrischia certamente, all'infinito che è incerto [29]. Non è così; infatti ogni giocatore rischia con certezza per guadagnare con incertezza, e tuttavia arrischia certamente il finito per guadagnare con incertezza il finito, senza andar contro la ragione. Non c'è affatto infinità di distanza tra la certezza di ciò che si rischia e l'incertezza del guadagno; è falso. C'è invece, a dire il vero, infinità tra la certezza di guadagnare e la certezza di perdere. Ma l'incertezza di guadagnare è proporzionata alla certezza di ciò che si arrischia secondo la proporzione delle probabilità di guadagno o di perdita. E da questo consegue che, se esistono tante probabilità da una parte e dall'altra, la partita si gioca a poste uguali; e allora la certezza di ciò che si scommette è uguale all'incertezza del guadagno; tutt'altro dunque da esserne infinitamente distante. E così, la nostra offerta possiede una forza infinita, quando c'è da arrischiare il finito in un gioco in cui sono uguali le probabilità di guadagno e di perdita, e c'è un infinito da guadagnare. Ciò è probativo; e se gli uomini sono capaci di qualche verità, questa è una.

— L'accetto, lo riconosco. Ma non c'è modo di scoprire il segreto del giuoco?

— Sì, la Scrittura e il resto ecc.

— Sì, ma io ho le mani legate e le labbra mute; qui mi si costringe a scommettere e io non sono libero; nessuno mi scioglie, ed io sono fatto in modo che così non posso credere. Che volete dunque che faccia?

— È vero. Ma riconoscete almeno la vostra impotenza a credere, giacché la ragione vi ci porta sebbene non lo potete. Studiatevi dunque non già di convincervi con l'accrescere le prove di Dio, ma col diminuire le vostre passioni. Volete andare verso la fede e non ne conoscete la strada; volete guarirvi dall'infedeltà e ne chiedete il rimedio; imparate da quelli che sono stati legati come voi e che adesso scommettono tutto il loro bene; costoro sono uomini che conoscono la strada che vorreste seguire e sono guariti da un male

29 Infatti, tra l'incertezza del guadagno e la certezza di ciò che si scommette c'è una comune misura che è il numero complessivo delle probabilità. Se, per esempio, prendo 100 biglietti di una lotteria su 100, ho la certezza di vincere; se ne prendo uno la mia certezza è uguale a un centesimo di certezza. Cosicché se non c'è un'infinità di casi di perdita e il valore della posta è infinito, questo valore sorpasserà sempre infinitamente quello della scommessa che è finita (Chevalier).

da cui voi vorreste guarire. Seguite il sistema con cui essi hanno cominciato: facendo tutto come se credessero, usando l'acqua benedetta, facendo celebrare messe ecc. Naturalmente anche questo vi farà credere e vi farà diventar come un bambino [30].

— È proprio quello che temo.

— E perché? Che cosa avete da perdere?

Ma per mostrarvi che questa è la via che mena là, vi dico che ciò diminuirà le passioni, che sono i vostri grandi ostacoli.

Fine di questo discorso. - Orbene qual danno n'avrete scegliendo questo partito? Sarete fedele, onesto, umile, riconoscente, benefico, amico sincero, veritiero. A dire il vero, non sarete più nei pestiferi piaceri, nella vanagloria, nelle delizie; ma non ne avrete altri? Vi dico che ci guadagnerete in questa vita e che, ad ogni passo che farete in questo cammino, vedrete tanta certezza di guadagno e tanta nullità in ciò che avete scommesso per una cosa certa, infinita, per la quale non avete dato nulla.

— Oh, queste parole mi esaltano, mi rapiscono ecc.

— Se questo discorso vi piace e vi sembra forte, sappiate che esso proviene da un uomo che s'è messo in ginocchio prima e dopo, per pregare quell'Essere infinito e senza confini, al quale egli sottomette tutto il suo essere affinché si sottometta anche il vostro essere per il vostro bene e per la sua gloria; e sappiate che così la forza si accorda con questo abbassamento.

[30] Abbiamo tradotto « vous abêtira » con « vi farà diventar come un bambino ». Questa espressione « vous abêtira », che scandalizzò tanto il Cousin, il quale la traduceva: « vi abbrutirà », e che alcuni nostri hanno tradotto: « vi istupidirà » (Bernasconi), « vi ammansirà » (Neri), « vi impecorirà » (Sciacca) ecc., così viene spiegata dal Brunschvicg: « *S'abêtir* significa rinunziare alle credenze a cui la cultura e l'abitudine hanno dato la forza della necessità naturale ma che vengono dimostrate impotenti e inutili dal ragionamento. *S'abêtir* significa ritornare all'infanzia per raggiungere le verità superiori che sono inaccessibili alla corta saggezza dei cosiddetti dotti. "Niente è più conforme alla ragione quanto questa sconfessione della ragione" [framm. 272]: la parola di Pascal è d'un credente, non d'uno scettico ». Aggiungiamo: ricorda l'evangelico « se non diventerete bambini... ». La parola è, per davvero, abbastanza forte; tanto che fu eliminata dalle edizioni di Port-Royal; ma se si considera che essa fu da contrappeso polemico alla difficoltà dell'incredulo: — Ma io ho le mani legate e le labbra mute; qui mi si costringe... — perde molto della sua virulenza. E nel frammento 358 non si dice forse che « chi vuol far l'angelo fa la bestia »? Giustamente nota A. Béguin (*Pascal par lui-même*, Ed. du Cerf. 1957, pag. 52): « Bisogna stare in guardia da una interpretazione stretta, che porterebbe questo sorprendente consiglio a un rinnegamento della ragione o anche più semplicemente a una pratica macchinale ».

The one coherent argument in Pascal's wager

Vincenzo Crupi

January 2025

Intro

The text of Pascal's Wager is still a conundrum after almost four centuries. The most influential reconstruction in the traditional scholarship is taken as "forced" even by its main proponent (Lachelier 1901). Hacking (1972, 2001) famously split Pascal's reasoning into *three* distinct arguments, "all valid, none sound", whereas according to Hájek (2003) the Wager is both *in*valid and "seemingly impossible" to formally reconstruct in a coherent fashion. I present here a novel, complete, and detailed analysis involving limited hermeneutic effort on the text. Technically, this will require a new kind of numbers.

Some backgroud premises

1. "it is true that there is an infinite number" (*il est vrai qu'il y a un infini en nombre*)

   → here a number denoted as "ω"

2. "a unit added to infinity does not increase it at all" (*l'unité jointe à l'infini ne l'augmente de rien*)

   → $\omega + 1 = \omega$ [*absorption*]

3. "God is, or is not. But towards which side will we lean? Reason cannot <u>settle</u> anything here" (*la raison n'y peut rien déterminer*)

   → $Pr(God) = 1/n$, for some natural n (therefore: $0 < Pr(God) < 1$)

4. The utility matrix (adapted from Hacking 2001, p. 121), with $g > b \geq 0$:

	(Christian) God	NO God
Christian life	$+g$	$-b$
NO Christian life	$-g$	$+b$

"You have to wager. It is not up to you, you are already committed" (*vous êtes embarqué*)

→ One can of course *suspend judgment* on whether *God* or $\sim$*God* is true. However, it *has* to *be* true that *either* you live the life of a believer (a fully Christian life) *or* not, and *that* you *must* decide.

An important point of terminology: For someone who bets 1 on X and then receives 2 in case X is true, I will say that 2 is what is *collected*, whereas 2 – 1 is what is *gained*.

→ So: collection = bet + (net) gain.

NOTE. Based on the table above, one can understand the Christian and the non-Christian playing options in several ways that are equivalent in formal and abstract terms. For instance: the Christian player is like a gambler who is buying a ticket (placing a bet) of value b (giving up the pleasures of a sinful life) for a lottery possibly paying $g + b$ if *God* is true, with an overall balance of $g + b - b = g$ (a great net gain) in this favorable case. The non-Christian player is like a bookie selling a ticket for value b (enjoying the pleasures of a sinful life) with a commitment to pay $g + b$ if *God* is true and an overall balance of $b - (g + b) = -g$ (a great loss) in this unfavorable case. [*In many respects, this is the most natural reading, because whether to enjoy or give up* b *seems effectively actionable for a human pondering the Christian* vs. *non-Christian options.*]

OR ELSE: The Christian and the non-Christian players put in the pot b and g, respectively. If *God* is true, then the Christian collects the pot and gains $g + b - b = g$ (a great net gain) whereas the non-Christian's final balance is $-g$ (a great loss). If $\sim$*God* is true, instead, then the Christian's final balance is $-b$ (giving up the pleasures of a sinful life), whereas the non-Christian collects the pot and gains $g + b - g = b$ (enjoying the pleasures of a sinful life).

Importantly, this latter version illustrates that:

– Christian's bet on *God* = b = non-Christians' net gain if ¬*God*
– Christian's net gain if *God* = g = non-Christian's bet on ¬*God*

→ In an abstract but important sense, Pascal is talking about *the choice between two bets*: the (Christian's) bet on *God* and the (non-Christian's) bet on ¬*God*.

For all instantiations of the matrix above that we will consider, one can prove that:

4*. EV(bet on *God*) = $-EV$(bet on ¬*God*)

<u>First steps: the rule of fair / profitable play</u> (in a binary gamble with <u>finite</u> figures)

5.1 A gamble on X is fair if and only if: $$Pr(X) = \frac{\text{bet on } X}{\text{bet on } X + \text{(net) gain if } X}$$

This is because, demonstrably, the expected value of such a bet is null, i.e., EV(bet on X) = 0.

5.2 A gamble on X is profitable if and only if: $Pr(X) > \frac{\text{bet on } X}{\text{bet on } X + \text{(net) gain if } X}$

This is because, demonstrably, the expected value of such a bet is strictly positive, i.e., *EV*(bet on *X*) > 0.

NOTE: These are Pascal's *original theoretical discoveries* in his earlier work as a founder of the probability calculus!

First, Pascal illustrates 5.1:

"Since [*puisque*, but read: *provided that*] there is an equal chance of gain and loss [*Pr*(*God*) = *Pr*(¬*God*)], if you stood merely to gain [read: *collect*] two lives for one, you could still bet."

$$Pr(God) = \frac{1}{2} = \frac{1 \text{ life}}{1 \text{ life} + 1 \text{ life}} = \frac{\text{bet on } God}{\text{bet on } God \ + \ \text{(net) gain if } God}$$

So the bet on *God* is fair under these circumstances: *EV*(bet on *God*) = 0. Given 4*, this implies that the bet on ¬*God* is *also* fair: "you could still [*but don't have to*] bet [*on God*]".

Second, Pascal illustrates 5.2:

"But suppose you had three lives to gain [*collect*]? You have to play [on *God*] (since you must necessarily play [*either on God or* ¬*God*]), and you would be foolish [*imprudent*], since you are forced to play, not to risk your life to gain [*collect*] three lives in a game where there is equal chance of losing and winning."

$$Pr(God) = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \frac{1 \text{ life}}{1 \text{ life} + 2 \text{ lives}} = \frac{\text{bet on } God}{\text{bet on } God \ + \ \text{(net) gain if } God}$$

So the bet on *God* is profitable under these circumstances: *EV*(bet on *God*) is strictly positive (and of course finite). Given 4*, this implies that the bet on ¬*God* is *detrimental* ("foolish", *imprudent*), with a strictly negative (finite) expected value.

Enter infinite value (and infinitesimal probability)

"But there is an eternity of life and happiness [*une éternité de vie de bonheur*]" → $g = \omega$

"This being so, in a game where there were an infinity of chances and only one in your favor, you would still be right **to wager** [*auriez encore raison de gager*] **one life** in order **to gain two**; and you would be making the wrong choice [*agiriez de mauvais sens*], given that you were obliged to play, if you refused to bet one life against three in a game where there were an infinity of chances and only one in your favor if the prize were an infinity of infinitely happy life [*une infinité de vie infiniment heureuse*]."

LACHELIER: "This passage [...] is not easy to understand. Taken literally, it is both incoherent and absurd. No one would agree to play 'one for two' nor even 'one against three' with a single chance of winning out of an infinite number of chances of losing."

$\rightarrow \frac{1}{\omega} \ll \frac{1}{3}$ (!)

my main hermeneutic proposal:

"to wager one life" = the current finite life that we dispose of ($b = 1$)

"to gain two" = to *collect* $b + g = 1 + \omega$ [only the "second" (viz. "third") life has infinite value]

Now we can see the text as providing exactly parallel illustrations of 5.1-2 only involving infinities:

$$Pr(God) = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{1+\omega} = \frac{\text{bet on } God}{\text{bet on } God \ + \ \text{(net) gain if } God}$$

The bet on *God* is demonstrably fair under these circumstances, just as the bet on ¬*God*, namely, *EV*(bet on *God*) = 0 = *EV*(bet on ¬*God*).

Moreover:

$$Pr(God) = \frac{1}{\omega} > \frac{1}{\underbrace{1+2\omega}_{\text{"three lives"}}} = \frac{1}{2\omega} = \frac{\text{bet on } God}{\text{bet on } God \ + \ \text{(net) gain if } God}$$

And accordingly, the bet on *God* is profitable here, whereas the bet on ¬*God* is the "wrong choice" (*mauvais sens*). We have that *EV*(bet on *God*) is strictly positive (and finite!), and correspondingly *EV*(bet on ¬*God*) is stricly negative.

QED

"But the prize here *is* an infinity of infinitely happy life, there is one chance of winning against a finite number of chances of losing, and what you are staking is finite. This leaves only one choice open, in any game that involves infinity, where there is not an infinite number of chances of losing to set against the chance of winning. There is nothing to ponder — you must stake everything. [*Partout où est l'infini, et où il n'y a pas infinité de hasards de perte contre celui de gain, il n'y a point à balancer, il faut tout donner.*]"

From the whole set of premises given, we finally have:

$$Pr(God) = \frac{1}{n} > \frac{1}{1+\omega} = \frac{1}{\omega} = \frac{\text{bet on } God}{\text{bet on } God \ + \ \text{(net) gain if } God}$$

The expected value of the bet on *God* (ω/n) is higher than any finite value. (→ "But…")

Final discussion and loose ends

– There still remain a few (minor) unsolved glitches in the text

– NONE of the "big" classical objection is neutralized (e.g., "many Gods")

– BUT we do have an interpretation of the text as conveying ONE formally coherent and valid argument

TECHNICAL APPENDIX: **Pascalian numbers**

All mathematical statements and computations above are validated in the system of *Pascalian numbers*.

A *natural* Pascalian number is a pair of natural numbers $\langle m,n\rangle$. [$\langle m,0\rangle$ corresponds to m as an ordinary natural number.]

For any two natural Pascalian numbers $\langle m,n\rangle$, $\langle m',n'\rangle$, $\langle m,n\rangle > \langle m',n'\rangle$ if and only if:

(i) $m > m' = 0$, or

(ii) $n > n'$ e $m \neq 0$, or

(iii) $n = n'$ e $m > m'$

Moreover, $\langle m,n\rangle = \langle m',n'\rangle$ if and only if $\langle m,n\rangle \ngtr \langle m',n'\rangle$ and $\langle m,n\rangle \nless \langle m',n'\rangle$, and $\langle m,n\rangle \geq \langle m',n'\rangle$ if and only if $\langle m,n\rangle > \langle m',n'\rangle$ or $\langle m,n\rangle = \langle m',n'\rangle$. One can prove that "≥" is a total order, to be interpreted as "being greater than or equal to".

Sum and product are defined as follows:

SUM: $\langle m,n\rangle + \langle m',n'\rangle = \begin{cases} \langle m+m',n\rangle & \text{if } n = n' \\ max[\langle m,n\rangle,\langle m',n'\rangle] & \text{if } n \neq n' \end{cases}$

PRODUCT: $\langle m,n\rangle \times \langle m',n'\rangle = \langle m \times m', n + n'\rangle$

Sum and product satisfy associativity, commutativity, and distributivity. Sum is *absorptive*.

For a Pascalian natural x, we also define $x^n = \underbrace{x \times \ldots \times x}_{n}$ ($n \in N$), and $x^0 = \langle 1,0\rangle$.

The successor of a Pascalian natural x can be defined as the smallest number greater than x. We denote $\langle 1,1\rangle$ as ω, the smallest infinite Pascalian natural, greater than all finite naturals. The successor of ω is 2ω (<u>not</u> $\omega + 1$). Every Pascalian natural has a successor, but it is <u>not</u> true that each Pascalian (strictly positive) natural has exactly one predecessor: there exist no number of which ω, in particular, is a successor.

The extension of Pascalian naturals to Pascalian integers and rationals follows usual constructions, with minor adjustments.

A Pascalian rational is conveniently seen as having the form $m\omega^n$, where m is a rational and n an integer. Pascalian rationals then include infinities such as 2ω ($n = 1$), infinitesimals such as $2\omega^{-1} = \frac{2}{\omega}$, and recover traditional rationals for $n = 0$.

A sample of relevant implications and illustrations:

1. $0 < \frac{1}{2\omega} < \frac{1}{\omega} < \frac{2}{\omega} \ldots$
2. $0 + \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega}$
3. $0 \times m\omega^n = 0$ for any rational m and integer n
4. $1 + \frac{1}{\omega} = 1$
5. $m\omega^n < m'\omega^{n+1}$ for any pair of rationals m,m' and any integer n, provided that $m' > 0$
6. $\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega} = \frac{2}{\omega}$
7. $\omega + 1 = \omega = \omega - 1$
8. $\omega - \omega = 0$
9. $-\omega - \omega = -2\omega$
10. $2\omega - \omega = \omega$
11. $\omega \times (-1) = -\omega$
12. $2 \times 5\omega = 10\omega$
13. $\omega \times (-\omega) = -\omega^2$

…