Università Cattolica del Sacro Cuore

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA PER LE SCIENZE,
ECONOMICHE, FINANZIARIE ED ATTUARIALI

Spunti di storia del pensiero matematico

Alfredo Malavolta

PREMESSA

Questo testo, che raccoglie ciò che ho esposto nei tre seminari di Storia della matematica, condotti con i colleghi del Dipartimento di Filosofia Ciro De Florio e Alessandro Giordani nei giorni 15, 22 e 29 maggio 2018, non pretende di contenere un racconto dettagliato e approfondito di tutto lo sviluppo delle teorie matematiche durante i secoli.

Ho cercato, nei tre incontri, di raccontare alcuni momenti e tematiche particolarmente significative della storia del pensiero matematico, fermandomi all'inizio del XX secolo, sia per motivi di tempo, sia per la complessità delle problematiche sorte in quel periodo, di cui si è comunque parlato, che avrebbero richiesto un notevole approfondimento.

Dalle origini all’età classica ellenica

Mi sono infiltrato spesso nelle iniziative del dipartimento di Filosofia per un sincero interesse allo sviluppo di tutto il pensiero umano; quando, nell’autunno scorso, c'è stato il seminario del prof. Mancosu, ho partecipato. Era un seminario di logica e non ho capito quasi niente, perché non bisogna credere che i matematici siano automaticamente in grado di discutere di logica contemporanea; è vero che forse so un po' più di matematica dei filosofi, ma loro sanno sicuramente molta più logica, e filosofia, di me. Cercheremo, in questi incontri, di integrarci.

Oggi ci occuperemo del mondo antico e quindi delle origini della matematica. Dobbiamo essere del tutto sintetici, perché chiaramente ci sarebbero tante, tantissime cose da dire (basta pensare all’ampiezza e alla profondità della cultura greca), ma il tempo a disposizione non ci permette di espanderci molto.

La prima domanda che ci dobbiamo porre è “che cosa intendiamo per matematica”, se vogliamo vedere dove e quando è nata. Qui ci sono diverse possibilità. Normalmente si considera che la matematica nasca quando comincia a formarsi una teoria deduttiva e credo che nessuno possa negare che questo sia accaduto nel mondo greco classico, sostanzialmente negli stessi tempi e insieme allo sviluppo delle prime riflessioni filosofiche; tanto è vero che il primo nome che c'è sui testi di storia della filosofia è quello di Talete, il primo nome che c'è sui testi di storia della matematica è quello di Talete (in realtà alcuni storici pongono un certo lasso di tempo tra le prime teorie filosofiche e quelle matematiche; ce ne occuperemo più avanti). Con lui siamo tra il settimo e il sesto secolo a.C.; Talete é una figura molto mitizzata e non abbiamo documenti sufficienti per attestare che effettivamente con lui nasca una vera e propria teoria deduttiva; è più ragionevole pensare, con Frajese, che Talete sia un anello di congiunzione tra gli studi di calcolo e misurazione egizi e mesopotamici e l’elaborazione di una vera e propria teoria matematica, che si può supporre avvenga nell’ambito della scuola pitagorica.

Prima, però, di addentrarmi nello sviluppo della matematica in Grecia, mi interessa dire quali sono le altre “interpretazioni” delle origini della matematica. C'è l'interpretazione secondo la quale la matematica nascerebbe nelle civiltà pre-elleniche che possono essere occidentali, su tutte le più famose sono quella egizia e quella mesopotamica, oppure anche più orientali; si parla infatti spesso di matematica indiana o di matematica cinese, anche con qualche sopravvalutazione del contributo che queste civiltà avrebbero dato al riguardo; in realtà nelle civiltà pre-elleniche non abbiamo chissà quale matematica, abbiamo tecniche matematiche, tecniche di calcolo, tecniche di misurazione e questo essenzialmente anche nelle civiltà pre-elleniche diciamo medio-orientali, quella egizia e quella mesopotamica, che sono giustamente decantate per tante conquiste, sia culturali che tecniche, rimaste per sempre patrimonio dell’intera umanità.

Dunque chi ritiene che nasce la matematica laddove si cominciano ad avere capacità di calcolo e di misurazione può dire che essa è nata prima che si sviluppasse la grande cultura greca. Da questo punto di vista, però, dovremmo andare ancora più indietro, perché già nella preistoria ci sono state alcune “cose” sicuramente interessanti. Ecco, vorrei soffermarmi di più su alcuni aspetti del lungo periodo che viene chiamato preistoria, e ciò per due motivi.

Si è spesso detto che la matematica preistorica[1] è una matematica che serve per rispondere ad esigenze della vita quotidiana, una tecnica matematica, quindi, con fini pratici, basata essenzialmente sul contare. Non è che questo non sia vero; però è anche vero che da ciò, in qualche modo, che non conosciamo del tutto, sono nati i numeri, che sono comunque delle entità astratte; infatti sappiamo che già in un periodo molto antico, all’inizio del secondo millennio avanti Cristo, nella civiltà egizia, come in quella mesopotamica, si facevano operazioni numeriche, a volte tutt’altro che facili, il che testimonia che la conoscenza dei numeri, almeno dei numeri naturali, è molto più antica. È chiaro che i numeri sono nati da un'idea di

[1] Usiamo il termine matematica, come si comprende immediatamente, in senso molto ampio

fondo, che in matematica c'è sempre stata e che forse ha avuto il suo sviluppo principale dal Seicento: è l'idea di corrispondenza. È stato ritrovato un osso di lupo, risalente a circa 30.000 anni fa (Boyer), in cui sono incise cinquantacinque tacche. Si può ipotizzare che l'incisione di tacche sia il modo in cui un pastore contava le sue pecore: il pastore segnava una tacca per ogni pecora che gli passava davanti e il giorno dopo il numero delle tacche e quello delle pecore dovevano essere uguali. Sembra che all'inizio l'uomo primitivo cominciasse a distinguere l'unità dalla molteplicità, ma poi sarebbe passato a considerare l'unità, la coppia e la molteplicità. E poi via via, per astrazione, si sarebbe formata, sia pure con molta lentezza, la successione naturale. Ci domandiamo: perché il passaggio attraverso unità, coppia e molteplicità? Perché la coppia è fondamentale per la vita, l'uomo ha cominciato a vedere che esistevano diverse coppie e in qualche modo, probabilmente proprio grazie a corrispondenze, è venuto fuori ciò che chiamiamo numero 2. È interessante, per me, che i Greci che, come sappiamo, "non buttavano via niente", nel senso che hanno saputo far tesoro di quello che le civiltà precedenti avevano intuito, scoperto, studiato, in una parola vissuto, trasformandolo in profonde ricchezze per l'umanità, nella loro lingua non avessero solo il singolare e il plurale, ma anche il duale, usato quando il soggetto è una coppia. Questo potrebbe derivare proprio dalla lenta scoperta dei numeri nella preistoria. L'idea di coppia appare fondamentale anche nella filosofia greca: basta pensare alle coppie di contrari nella scuola pitagorica e al fatto, a ciò collegato, che l'armonia nasce dall'incontro di una coppia di concetti antitetici (pari-dispari, ...). Per non parlare poi della filosofia di Platone con il concetto di Diade.

Vorrei sottolineare come l'idea di corrispondenza, pur essendo una delle idee base della matematica, mi sembra sia divenuta veramente centrale nel Seicento, costituendo il fondamento stesso di quella che oggi chiamiamo analisi matematica, che è sostanzialmente proprio studio di funzioni e che è legata anche alla nascita della scienza moderna della natura (spazio percorso in funzione del tempo, etc.).

Fondamentale qui è la figura di Leibniz, che amplia la matematica da semplice scienza della quantità a scienza della relazione, quindi scienza della corrispondenza, osservando che l’ordine della realtà è dato da relazioni, che legano enti, non necessariamente di tipo quantitativo (ad esempio la relazione di similitudine tra due figure).

L'altro aspetto, che è molto interessante e molto “giovane”, per cui ci interessiamo della preistoria è il fatto che si sono ritrovate, nelle iscrizioni rupestri, diverse piante di labirinto. Ora anche qui è facile il collegamento con la cultura greca, basta pensare al labirinto di Creta e al mito del filo di Arianna. Il labirinto è, per dirlo alla buona, una forma matematica, una forma matematica in cui la lunghezza delle linee non conta, il calcolo non conta, conta invece il fatto che una linea intersechi un'altra linea, contano cioè le relazioni che oggi si direbbero di tipo topologico. A lungo si è ritenuto, e da più parti si ritiene anche oggi, che la matematica preistorica fosse una matematica pratica, di conto e che essa servisse solamente per le attività pratiche, ma ciò appare in contrasto con una teoria di Jean Piaget (grande studioso dell'apprendimento matematico nell’infanzia). Egli sosteneva che le prime idee matematiche del bambino non sono idee di misurazione: il bambino, messo dinanzi al disegno di due linee, una più lunga dell'altra, una chiusa, l’altra aperta, non osserva tanto la diversa lunghezza, quanto la differenza tra quella chiusa e quella aperta. C’è dunque, secondo Piaget, nel bambino, un’acquisizione di idee matematiche non quantitative precedente a quella di idee di misurazione.

Poiché c'è sempre stata l'idea, tra gli studiosi del campo, che ciò che è accaduto nella preistoria come sviluppo della conoscenza è simile a quello che accade nella mente del bambino, c'è una strana differenza tra, da una parte, quello che accadrebbe, secondo Piaget, nel bambino, che vede di più aspetti quali apertura e chiusura (proprietà topologiche), e quello che sarebbe accaduto nella preistoria, dove l'aspetto più interessante era l'aspetto del calcolo, quindi l'aspetto quantitativo.

Il ritrovamento dei labirinti invece fa vedere proprio come anche idee di matematica non quantitative sono presenti nella preistoria. Al tempo stesso, osserviamo che, chiaramente, il labirinto non ha fini pratici, ma piuttosto culturali-religiosi: il labirinto, da cui è difficilissimo uscire, lo si vede, in genere, come la rappresentazione della vita, nella quale bisogna trovare la via del bene, della felicità... E questo, spesso, si riesce a fare solo con l’aiuto divino: Arianna è la figura divina che, fuori dal mondo, aiuta l'uomo, Teseo, a sconfiggere il male e ritrovare la strada della salvezza.

Quindi nel labirinto è presente una matematica né finalizzata alla vita pratica, né che abbia aspetti quantitativi. Del resto Boyer sottolinea che, già nella preistoria, esistevano delle rappresentazioni dei miti della creazione e che in queste rappresentazioni le figure dovevano uscire sulla scena secondo un certo ordine, per cui egli sostiene che l'idea di numero ordinale potrebbe essere nata ancora prima dell'idea di numero cardinale. La visione odierna della matematica preistorica, dunque, è più ampia di quella che noi avevamo anche solo settanta anni fa, perché queste ricerche sui labirinti sono piuttosto recenti, a partire dalla metà del secolo scorso.

Sta di fatto che non c'è nessun documento che attesti la presenza di una teoria deduttiva nella preistoria, come pure nelle civiltà pre-elleniche, da cui i Greci hanno certamente attinto, ma, presumibilmente, problematiche matematiche, non una matematica. I Greci hanno attinto, per esempio, probabilmente, dal mondo egizio problemi come quello della misurazione dell'altezza di una piramide o di un obelisco, come pure, dal mondo mesopotamico, importanti risultati, quali il teorema di Pitagora, ma sono stati loro che hanno fatto tesoro di problematiche, intuizioni, scoperte delle civiltà precedenti per elaborare ciò che oggi chiamiamo matematica. Gli Egizi e i diversi popoli che si sono avvicendati nella Mesopotamia hanno sicuramente costituito civiltà di alta cultura e, almeno nel caso dell’Egitto, di notevole capacità tecnica, ma, in base ai documenti che abbiamo, dobbiamo constatare che non hanno minimamente elaborato una cultura astratta, in particolare di carattere matematico. Certamente non possiamo sorvolare sulla civiltà mesopotamica che oggi da studiosi come Boyer viene considerata decisamente superiore, matematicamente, a quella egizia; si parla tanto della misurazione dei terreni per le esondazioni del Nilo, ma in realtà nelle tavolette lasciate dai Sumeri e dai popoli che si sono succeduti tra il Tigri e l'Eufrate troviamo questioni matematiche molto più interessanti: innanzitutto la notazione posizionale dei numeri, che i Mesopotamici sono stati i primi ad usare e che tuttora è il modo in cui scriviamo i numeri, anche qualora siano molto grandi o con infinite cifre decimali senza periodo, con i soli 10 simboli indiani, grazie al diverso significato che lo stesso simbolo assume a seconda della posizione che occupa.. Può apparire curioso il fatto che in Mesopotamia la base non fosse 10, ma 60, per cui, dal momento che scrivevano un numero, supponiamo 3, ripetendo tre volte il simbolo dell'unità, per scrivere numeri grandi, quali 49, ricorrevano a due simboli, quello del numero 1 e un altro per il numero 10. Perché usassero la base sessanta non lo sappiamo; si è pensato all'esigenza, per studi astronomici, di esprimere numeri molto grandi con pochi simboli, ma anche al fatto che sessanta ha molti divisori e quindi si prestava bene a compilare eserciziari e tavole con i calcoli già compilati, che fornivano un utile strumento di consultazione per risolvere problemi pratici (legati anche all'amministrazione dello stato), in cui veniva usata l'aritmetica e anche l'algebra. Bisogna aggiungere che i Mesopotamici utilizzavano la scrittura posizionale anche per esprimere numeri non interi e da ciò derivano le espressioni minuto, minuto primo, minuto secondo, usate per indicare sottomultipli dell'ora nella misura del tempo: in latino, infatti, le parti decimali (per loro i sessagesimali), essendo "piccoli", sono stati chiamati "pars minuta", "pars minuta prima", "pars minuta secunda". Due tavolette tra le più antiche sono particolarmente interessanti per noi: una perché riporta la soluzione di una equazione di secondo grado secondo la formula che tutti conosciamo, e questo testimonia che nella "fertile mezzaluna" erano arrivati ad un'algebra di un certo livello; l'altra è una tavoletta del periodo babilonese antico (1900-1600 a.C.), che si trova alla Columbia University, la tavoletta 322 della Plimpton collection, ritrovata non in perfette condizioni, ma che, secondo notizie recenti, sarebbe stata restaurata in modo da poter essere letta interamente. In essa si trova una colonna di terne di numeri, riconducibili a terne pitagoriche, a terne cioè di numeri naturali x, y, z tali che la somma dei quadrati dei primi due sia uguale al quadrato del terzo; in termini geometrici ciò equivale a dire che x e y sono le misure dei cateti di un triangolo rettangolo, di cui z misura l'ipotenusa. La presenza di un riferimento a terne pitagoriche fa sospettare che i Mesopotamici conoscessero il teorema di Pitagora. Non abbiamo però nessun documento che attesti che nel mondo assiro-babilonese si sia creata una vera teoria deduttiva. Anche del teorema di Pitagora una dimostrazione non è stata trovata. Boyer ipotizza, ragionevolmente, che una qualche forma di giustificazione delle regole e dei procedimenti che venivano usati dagli studiosi di quella terre dovesse pur esserci; i documenti, almeno per ora, non ce lo confermano. Resta l'ammirazione per il livello di capacità aritmetico-algebriche che le tavolette conosciute ci hanno fatto scoprire.

Vorrei ripartire proprio dal teorema di Pitagora per introdurre il mondo che più ci interessa, il mondo greco. Come ho detto, la matematica nel mondo greco appare, fin dalle sue origini, sostanzialmente legata alla filosofia; entrambe nascono dalla passione dello spirito ellenico per capire, capire la realtà tutta intera, i principi primi della realtà empirica, come pure il perché di certe relazioni tra numeri o tra figure, più avanti anche la verità sull'uomo. Spesso si dice che in Grecia, nella matematica, si è passati da una ricerca del "come" ad una del "perché" e ciò è avvenuto nella scuola pitagorica, fiorita nel VI secolo a.C., scuola eminentemente ascetica; piuttosto chiusa nei confronti degli "esterni", per cui si fa fatica a sapere quello che effettivamente ha scoperto il maestro, Pitagora, e quello che invece hanno trovato i suoi allievi, a lui contemporanei o dei secoli successivi. Questa caratteristica, in particolare, ha fatto si che non tutti gli storici siano concordi nell'affermare che gli studi matematici pitagorici siano nati nel VI secolo a.C.; ci sono stati degli studiosi di storia della matematica che hanno negato che la prima scuola pitagorica fosse effettivamente una scuola matematica, affermando che l'interesse per la matematica sarebbe nato un secolo dopo, ai tempi di Archita di Taranto (seconda metà del quinto secolo). La maggior parte degli studiosi non concorda con questi dubbi e sostiene che la ricerca matematica sia stata essenziale nella scuola pitagorica fin dall'inizio. Sono concorde con questi ultimi, tra i quali si annoverano gli storici della scuola di Federigo Enriques, per una serie di ragioni, tra cui, fondamentale, la testimonianza di Aristotele, personaggio certamente degno di fede. Aristotele, nella "Metafisica", sostiene che i Pitagorici, "avendo cominciato ad occuparsi di ricerche matematiche ed essendo grandemente progrediti in esse", avevano pensato che i principi della realtà fossero quelli che erano alla base della matematica, cioè i numeri. Inoltre essi avevano poi "riconosciuto che le proprietà e le relazioni delle armonie musicali corrispondono a rapporti numerici" e ciò, unitamente al fatto che anche altri fenomeni naturali potevano essere descritti e spiegati attraverso leggi aritmetiche, li aveva "indotti ad ammettere che i numeri siano gli elementi di tutte le cose esistenti e che tutto il cielo sia proporzione ed armonia". In sostanza, secondo Aristotele, gli studi matematici sarebbero stati all'origine della concezione cosmologica pitagorica, per cui, se veramente tali studi fossero iniziati ai tempi di Archita, anche la filosofia della scuola di Pitagora sarebbe stata molto più tarda e, se vogliamo, piuttosto estemporanea, visto che si tratta di una ricerca sul principio della realtà naturale, che si svolgerebbe in un momento in cui l'interesse degli uomini colti si rivolge all'uomo. Si può ritenere quindi che la matematica greca nasca nel VI secolo a.C., essenzialmente nella scuola pitagorica, nella quale, per la prima volta, non è un elemento materiale, come l'acqua o l'aria, ma il numero ad essere pensato come il principio, la natura profonda della realtà. (A Bologna, nel 2012, nella relazione al convegno "Il logos di Dio, il logos dell'uomo", ho detto che questa idea pitagorica, secondo la quale è il numero che dà la forma stessa alla realtà e quindi le leggi della matematica esprimono l'armonia del cosmo, rappresenta il logos dell'uomo che incontra il logos di Dio, il pensiero di Dio sulla realtà, l'armonia che Dio ha messo in essa).

Pitagora vive proprio nell'ultimo periodo della grande civiltà mesopotamica; nel

538 a.C. Ciro di Persia sconfigge i babilonesi, decretando la fine della loro potenza politica e, sostanzialmente, anche della loro cultura, anche se la matematica mesopotamica ha una certa sopravvivenza. È ipotizzabile che Pitagora, nei suoi viaggi, abbia conosciuto la cultura babilonese prima di questo crollo e abbia portato in Grecia alcuni dei risultati più interessanti che aveva raggiunto, in particolare il teorema che porta il suo nome. Si suppone, come eminenti storici della matematica pensano, che proprio per rendere ragione di questo risultato si sia cominciata a costruire quella che noi chiamiamo una teoria deduttiva. Poiché è chiaro che non è successo che un giorno Pitagora, o un suo allievo, si sia svegliato e abbia detto "Adesso mettiamo dei postulati", probabilmente, analizzando il teorema, il maestro e/o i discepoli si sono accorti che questo risultato dipendeva da un risultato precedente, che a sua volta dipendeva, era conseguenza logica, di un altro risultato ancora, fino a che, tornando sempre indietro, sono arrivati a delle proposizioni che apparivano evidenti, quelle che noi oggi chiamiamo postulati. A questo punto, ritornando indietro sulla strada percorsa, veniva dimostrato il teorema. Come detto, è ragionevole attribuire alla scuola di Pitagora l'inizio della matematica come la intendiamo noi, come un insieme di teorie deduttive, più o meno complete, ma non contraddittorie. Si attribuisce alla stessa scuola anche la parola matematica, che significa "le cose che si apprendono", "le cose che si insegnano". Perché queste espressioni? Probabilmente perché le conoscenze matematiche si consideravano certe grazie al metodo con cui si ottenevano, il metodo deduttivo, per cui la certezza delle premesse porta alla certezza delle conclusioni. Purtroppo il primo testo matematico a noi pervenuto completo è la famosa opera di Euclide "*Elementi*". In essa l'autore, vissuto ad Alessandria tra la fine del IV e l'inizio del III secolo a.C., espone in forma assiomatica la matematica che si era sviluppata nei secoli precedenti. L'opera, geniale, sia per come l'autore rielabora la matematica via via sviluppatasi, sia per i contributi originali di Euclide stesso, è stata da allora alla base dell'apprendimento della geometria fino ai giorni nostri e sostanzialmente ancora lo è. Gli "Elementi" non ci forniscono, però, i passi compiuti dai matematici per

raggiungere certi risultati, né, tanto meno, i problemi che avevano dovuto affrontare. Riusciamo comunque a conoscere, almeno parzialmente, la storia della matematica preeuclidea, come della contemporanea filosofia, attraverso frammenti e testi di filosofi, storici, letterati, come pure di Euclide stesso e di altri grandi matematici, quali Archimede (287-212 a.C.). Analizziamo brevemente i principali problemi che si sono sviluppati nel pensiero matematico tra il VI e il IV secolo a.C. Alla base della rappresentazione matematica del mondo data dai Pitagorici c'è l'idea fondamentale del "punto monade", cioè di un punto che ha una sua dimensione, sia pure piccolissima, e quando Euclide dice "punto è ciò che non ha parti" fa riferimento a questa idea, cioè a qualcosa di molto piccolo, che non si può ulteriormente spaccare. Con questi punti i Pitagorici pensavano di rappresentare la realtà; i numeri stessi erano rappresentati da punti disposti in diversi modi, per cui si parlava di numeri triangolari, come il 3, rappresentato attraverso i tre vertici di un triangolo, quadrati,... Così la realtà e la sua armonia venivano descritte attraverso rapporti numerici, dove i numeri erano, ovviamente, naturali e quindi i loro rapporti razionali positivi; ma questa armoniosa rappresentazione del cosmo, durante il quinto secolo, veniva sconvolta da grossi problemi e profonde riflessioni, in parte nati all'interno della scuola pitagorica stessa, in parte in quella eleatica, in parte grazie a filosofi come Democrito e Anassagora.

L'idea del punto-monade della matematica pitagorica comporta che in un segmento, avendo i punti una, sia pur piccolissima, dimensione, sarà contenuto un numero finito di punti e, di conseguenza, il rapporto tra due segmenti sarà sempre un numero razionale, ovvero, in linguaggio geometrico, due segmenti saranno sempre commensurabili: infatti, se, ad esempio, in uno dei due segmenti ci sono 57 punti e nell'altro 13, il loro rapporto sarà 57/13. Applicando, però, il teorema di Pitagora per trovare la diagonale di un quadrato di lato unitario, si ha che la diagonale ha come lunghezza la radice quadrata di due, ma i matematici greci scoprono che nessun numero razionale ha quadrato uguale a due. Il risultato crea del terrore nella scuola pitagorica e, diffuso fuori di essa, in tutta la cultura del momento: infatti, esso sembra distruggere ciò che era alla base della ricerca greca, cioè la certezza che la realtà fosse razionale e che, proprio per questo, il logos umano fosse capace di conoscerla. I Greci non si perdono d'animo e la ricerca filosofica e matematica riprende e si sviluppa in ampiezza e profondità, ma certo con mutamenti significativi. Dal risultato negativo sulla radice quadrata di 2 scaturisce una sorta di supremazia della geometria sull'aritmetica: certi problemi, infatti, si possono risolvere geometricamente, ma non aritmeticamente. Ad esempio, il problema di trovare il quadrato doppio di un quadrato dato Q, di lato unitario, si risolve considerando quello che ha per lato la diagonale di Q; però, senza i numeri irrazionali, non si riesce a determinare la misura del lato di tale quadrato doppio, che è, come detto, la radice quadrata di 2. La geometria appare più potente nella rappresentazione della realtà rispetto all'aritmetica; mentre inizialmente i Pitagorici vedevano nel numero il principio della realtà. Aristotele, con la sua genialità, cercherà, per così dire, di rimettere le cose a posto, ricordando che, ad esempio, per introdurre il numero 3, non c'è bisogno del triangolo, per introdurre il triangolo c'è, invece, bisogno del numero 3; pertanto l'aritmetica è logicamente apriori rispetto alla geometria. Sarà poi Cartesio, nel XVII secolo, a sostenere che l'aritmetica-algebra è più potente della geometria per conoscere la realtà empirica e gli sviluppi nati nel XIX secolo dalla "sua" geometria analitica (spazi di dimensione maggiore di 3, punti all'infinito) daranno ragione a lui e, in fondo, anche alla prima scuola pitagorica. Altri aspetti, più positivi, emergono dal risultato sulla radice quadrata di 2. I matematici cominciano ad interrogarsi più approfonditamente sulla natura degli enti di cui trattano: forse, i punti non saranno come li pensavamo, piccoli ma con dimensione, perché forse nel segmento ce ne devono stare infiniti, altrimenti arriviamo ad una contraddizione. Ecco, si affaccia l'idea dell'accettazione dell'infinito nella matematica greca. Ma se i punti di un segmento sono infiniti, essi sono senza dimensione: comincia ad essere più chiaro, e ciò è sicuramente un passo molto importante, che gli enti matematici sono enti intellegibili, non sono enti sensibili. Fino a quel momento l'idea di punto-monade e quella di numeri formati da punti, che compongono l'universo, non dava chiarezza su quale fosse la natura degli enti matematici.

E questi infiniti punti come si legano tra loro? Fino a che si pensa che i punti abbiano una certa dimensione, il segmento appare come un insieme finito di piccolissimi enti accostati l'uno all'altro, ma nella nuova visione cosa tiene insieme gli infiniti punti, in modo da formare un segmento? C'è bisogno dell'idea della continuità, assente nella scuola pitagorica, ma concetto fondamentale per capire l'Essere secondo i pensatori della scuola eleatica, in piena fioritura nel V secolo a.C., Parmenide e il suo discepolo Zenone.

A tutti è noto il paradosso, proposto da Zenone, di Achille che non raggiunge la tartaruga, se in una gara di corsa dà a questa un certo vantaggio. Ebbene, perché Achille non raggiunge la tartaruga? Perché il movimento di Achille e quello della tartaruga vengono osservati ad istanti staccati, non con "continuità", come se noi vedessimo un film senza il fenomeno della persistenza delle immagini; noi vedremmo tante fotografie staccate. Sia la possibilità della concezione dell'infinito in matematica, ma anche in filosofia, sia l'esigenza di capire la continuità agitano il dibattito culturale del V secolo a.C. greco. Non possiamo sapere se lo "scandalo" pitagorico della scoperta delle grandezze incommensurabili sia scoppiato prima delle riflessioni di Parmenide sulla continuità dell'Essere o meno, ma ritengo che non sia questo l'essenziale. Ritengo che sia, invece, molto importante sottolineare la presenza di queste profonde problematiche nella matematica e nella filosofia greca; sono problematiche che continueranno ad essere al centro delle ricerche e dei dibattiti per secoli e secoli e solo nel 1872 Richard Dedekind, e, per altre vie, nello stesso periodo, Georg Cantor daranno finalmente definizioni semplici e rigorose della continuità. Quanto all'infinito, vorrei ricordare che Democrito pensava ad una realtà fisica formata da infiniti atomi e ritengo particolarmente interessante un frammento di Anassagora, riportato da Ettore Carruccio: "Rispetto al piccolo non c'è un minimo, ma c'è sempre un più piccolo, perché l'esistente non può essere annullato per divisione. Così rispetto al grande, c'è sempre un più grande, e il più grande è uguale al piccolo come pluralità, …" Qui è adombrata la proprietà fondamentale degli insiemi infiniti, che nel XIX secolo verrà utilizzata da Dedekind come definizione dell'insieme infinito, cioè che un insieme infinito, e solo un insieme infinito, si può mettere in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria. Le considerazioni che abbiamo svolto portano ad affermare che anche l'infinito in atto è presente nel pensiero greco classico, e ciò è confermato in alcuni passi di dialoghi platonici. E se Aristotele sosterrà che in matematica si può ragionare solo sull'infinito in potenza, e ciò basta ai matematici per lo sviluppo della loro scienza, non penso si possa affermare che tutto il pensiero greco rifiuta l'infinito in atto[2]. Un'ultima considerazione: problematiche e sconfitte non sono state capaci di fermare la matematica greca, e questo fatto è avvenuto anche nei secoli successivi: la scienza matematica si è sviluppata nei millenni, mentre si continuava a cercare di capire alcuni concetti di base, che i matematici intuivano, ma non riuscivano a definire; anche oggi è così. Come ha detto un grande storico della matematica, questa scienza è come un albero, che, mentre cresce in rami e foglie, rende sempre più profonde le sue radici.

---

[2] La differenza tra infinito in potenza, o potenziale, e infinito in atto, o attuale, è stata ben delineata da Aristotele. Mi limito ad un esempio: se pensiamo a N come un insieme che contiene infiniti numeri, lo pensiamo come "infinito in atto"; se invece pensiamo che, per quanti numeri naturali consideriamo, ce ne sono altri ancora, pensiamo a N come "infinito in potenza", come una potenzialità di infinito.

Dal mondo antico alla nascita della matematica moderna

La matematica greca si sviluppa nel periodo che va dalla sua nascita, che abbiamo collocato nel VI secolo a.C., per tutto il V secolo e durante il IV secolo trova il suo centro naturale nell'Accademia di Platone (i colleghi di filosofia hanno parlato molto di lui e della sua scuola la scorsa volta): è in questo luogo che si incontrano, dibattono, studiano, risolvono problemi molti dei migliori matematici dell'epoca, sollecitati da Platone stesso, che vede nella matematica la prima forma di conoscenza umana, che vada oltre la pura realtà empirica. Il IV secolo è, si può dire, un secolo di difficoltà politiche e di transizione culturale per i Greci: le città-stato greche subiscono l'egemonia dei re macedoni, Filippo prima e Alessandro Magno poi, mentre il grande slancio, la passione ellenica per la ricerca della "sapienza", che penetra il significato della vita e della felicità umana, tende ad affievolirsi. E' anche vero che proprio in questo secolo la filosofia raggiunge le sue vette più alte, con Platone ed Aristotele, e che gli studi matematici proseguono con grandi risultati non solo nello stesso secolo, ma anche in quello successivo, quando la cultura greca avrà cambiato già carattere e alla ricerca della sapienza avrà cominciato a sostituirsi quella della "saggezza"; anzi, sarà proprio nel III secolo a.C. che Euclide assiomatizzerà la geometria e vedranno la luce le opere di Archimede, fondamentali basi per la ripresa degli studi di aree e volumi nel Seicento. Tutto ciò non desta una particolare meraviglia: appare, infatti, naturale che verso la fine di un periodo ricco di fervore culturale nasca la riflessione più profonda su quanto si è discusso ed elaborato e con più chiarezza emergano e siano espressi con rigore i risultati raggiunti. Voglio comunque sottolineare che, anche se Euclide vive ad Alessandria, ormai nuovo centro internazionale della cultura, tra l'ultima parte del IV e la prima del III secolo a.C., egli, come pure Archimede, e forse anche Apollonio, il grande studioso delle sezioni coniche, è di impostazione classica, cioè è un appassionato ricercatore della verità per la verità, a cui certo non antepone le applicazioni pratiche o qualche vantaggio economico. E' famoso l'aneddoto secondo cui a Euclide viene chiesto da un discepolo: "va bene, tutti questi teoremi, questo rigore, questa difficoltà; e poi? Cosa ci guadagno?" Allora Euclide dice al suo servo: "dagli una moneta e caccialo: questo vuole guadagnare con la scienza!". Non si sa se questo racconto sia veritiero, ma viene considerato tradizionalmente molto espressivo della personalità di Euclide. Come ho detto, Euclide ha assiomatizzato la geometria: non è lui che ha fatto della geometria una teoria assiomatica (come abbiamo visto nel primo incontro, già nel VI secolo si può ipotizzare che la scuola pitagorica inizi la costruzione di una tale teoria), ma è suo il primo testo a noi pervenuto, "*Elementi*",[3] in cui questa branca della matematica viene presentata partendo dai termini primitivi e dai postulati per arrivare ai vari risultati con metodo rigorosamente deduttivo.

Dovremo a questo punto fare un salto e riprendere a parlare della storia della matematica grosso modo dal XVII secolo. Si, perché in questo secolo si sviluppa, un po' in tutta Europa, un fervore di ricerche scientifiche, di scambi epistolari, di fioritura di centri di studio e confronto, quali le Accademie, che ci porta ad avvicinare tale periodo, in quanto a vivacità culturale, all'età d'oro della civiltà greca, tra il VI e il IV secolo a.C. Ovviamente questo non vuol dire che in mezzo ci sia il vuoto intellettuale: certamente, con il III secolo a.C. si verifica un profondo mutamento nella ricerca filosofica e, più in generale, nelle diverse espressioni culturali, che investe anche la matematica, che si apre in modo deciso alle applicazioni alla geografia terrestre e all'astronomia; è in questo ambito che sorgono gli studi di trigonometria. Se, però, osserviamo lo sviluppo della matematica in tutto il lungo periodo ellenistico, cioè, grosso modo, nei sette secoli che vanno dalla morte di Alessandro Magno alla caduta dell'impero romano d'occidente, troviamo molti scienziati piuttosto isolati, nel tempo e nello spazio, non il fervido dibattito dei secoli precedenti. Tra tutti vorrei ricordare Claudio Tolomeo, vissuto verso la fine del II secolo d.C., autore del fondamentale testo di

[3] Sembra siano stati scritti, precedentemente ad Euclide, altri testi di "elementi", andati perduti

astronomia antica "*Sintassi matematica*", chiamato da subito "la grandissima" (opera), in greco "e meghiste", giunta a noi con l'appellativo greco, ma modificato dagli Arabi in "Almagesto". La cultura antica vive un ultimo periodo di splendore soprattutto grazie al recupero che i dotti cristiani fanno della filosofia, della letteratura, della scienza greca, in cui vedono, giustamente, lo slancio dell'uomo verso la verità, il bene, la felicità, l'infinito, con la domanda a Dio perché si riveli, presente nelle tragedie e in alcuni tratti della stessa espressione filosofica. Non posso non citare s. Agostino, il cui nome compare anche in molti dibattiti di interesse non solo filosofico, ma anche matematico, ad esempio sulla millenaria problematica dell'infinito. Grosso modo con il V secolo dell'era cristiana inizia un periodo di sostanziale "silenzio" culturale, cui segue una rinascita, i cui albori si possono vedere già nell'XI secolo. Sicuramente, per quanto riguarda la matematica, ma, più in generale tutta la cultura, è fondamentale il fatto che gli Arabi, nei loro spostamenti per il mondo, vengano in contatto con culture diverse, traducano testi antichi, si interessino di problematiche e tecniche non conosciute, o poco considerate, in Occidente. Tra le "novità" che giungono attraverso la cultura araba, la più famosa è l'uso delle cosiddette cifre arabe, che in realtà arabe non sono: gli Arabi le hanno importate dall'India. Ne parlava già il vescovo siriano Sebokt nel VII secolo, quando Maometto era morto da qualche decennio e l'incontro degli Arabi con le altre culture doveva ancora avvenire. Il vescovo parlava di nove simboli bramanici, che sarebbero i nostri 1, 2, ...9. Quello che mancava ancora è il simbolo dello zero: simbolo, tengo a precisare che si tratta di simbolo, perché zero deve essere visto in due modi diversi: come simbolo e come numero. È evidente che come numero non viene accettato fino ad un certo momento, potremmo ipotizzare quello della nascita della scienza moderna della natura, quando è necessario parlare di quantità positive e negative, ma anche nulle, di accelerazioni positive e accelerazioni negative (decelerazioni), come pure di moti senza accelerazioni. Del resto, come abbiamo visto, già dalla preistoria i numeri si erano formati, per contare e ordinare, a partire da 1. Oggi non credo ci siano dubbi sul fatto che molti testi che fanno partire i numeri naturali da zero, lo fanno per collegare i numeri naturali alle cardinalità degli insiemi, seguendo, in sostanza, la linea di pensiero di studiosi quali Bertrand Russell, che hanno visto appunto nella cardinalità di un insieme la possibile definizione di numero (naturale). Poiché l'insieme più semplice (o forse il più complicato?) da prendere come punto di partenza è l'insieme vuoto, allora si pensa di far iniziare la successione dei numeri naturali dallo zero. Vorrei osservare che il ragionamento degli studiosi che hanno proposto di definire i numeri naturali come cardinalità, fondando quindi l'aritmetica (e il resto della matematica classica) sulla logica e la teoria degli insiemi, è molto complesso e la definizione che ne scaturisce è oltremodo artificiosa. Personalmente, ho sempre insegnato, seguendo la genesi storica, che i numeri naturali iniziano da 1 e che zero fa parte degli interi, ma non dei naturali. A tal riguardo i matematici, come accade su altre questioni, si dividono in due gruppi, quelli che partono da 0 e quelli che partono da 1, ma, per fortuna, per costruire rigorosamente l'aritmetica è necessaria solo l'idea di "primo elemento della successione naturale", non stabilire come si chiama. Bisogna però, quando se ne parla, essere chiari sul significato da dare ai simboli, nel senso di stabilire se N è $\{0,1,\ldots\}$, oppure $\{1,2,\ldots\}$.

Sta di fatto che quando lo zero venne introdotto come simbolo, si pensa molto prima del periodo di cui ci stiamo occupando, ciò avvenne perché tale simbolo era necessario; nella scrittura posizionale dei Mesopotamici per lunghi periodi lo zero non c'è stato e, anche quando una posizione vuota è stata indicata mediante un simbolo, questo non veniva comunque inserito, se la posizione vuota era quella finale: così, ad esempio, non si poteva distinguere tra 32 e 320, mentre si poteva tra 32 e 302, almeno da un certo momento in poi, a quanto pare negli ultimi secoli della millenaria civiltà mesopotamica, quando già era fiorita la cultura greca.

Gli Arabi, incontrando la cultura indiana, portano in Occidente i nove simboli numerici, che poi si diffondono, con il simbolo dello zero, grazie all'opera di diversi studiosi, tra cui ricordiamo Leonardo Pisano, detto il Fibonacci, perché figlio di Bonaccio, un mercante di Pisa. Proprio grazie ai commerci del padre Leonardo viene a contatto con la cultura degli Arabi, ricca di quanto essi avevano incontrato nelle loro peregrinazioni e nel 1202 scrive un testo rimasto famoso, il "*Liber abbaci*". Qui debbo fermarmi un attimo per alcune considerazioni: innanzitutto non bisogna credere che Leonardo Pisano fosse l'unico matematico del tardo Medioevo; c'erano altri studiosi, che hanno anche contribuito alla diffusione del sistema di numerazione indo-arabico e la vivacità "scientifica" era superiore a quanto si crede; al riguardo, citando Boyer, ricordo che, sia negli ambienti culturali islamici, che in quelli cristiani, c'era l'idea "che l'aritmetica e la geometria fossero connesse tra loro e si rafforzassero l'una con l'altra", un'idea che è stata sviluppata, come sappiamo, nel XVII secolo da Pierre Fermat (1601-1665) e René Descartes (=Cartesio), (1596-1650), diventando uno dei fondamenti della scienza moderna. Del resto è innegabile che la parte del Medioevo che si colloca dopo il famoso anno mille (i riferimenti temporali sono necessariamente grossolani) presenti una rinascita culturale che porta, nei secoli dal XIII al XVI, ad un grande patrimonio di pensiero, di scienza, di letteratura, di arte; personalmente ritengo, al riguardo, che la parola "Rinascimento" dovrebbe indicare l'intero periodo che stiamo trattando, non solo i secoli XV e XVI, a cui la parola fa tradizionalmente riferimento, in quanto in essi le arti figurative raggiungono livelli sublimi. Alla base della rinascita sono certamente le traduzioni dei classici greci in lingua latina, in buona parte attraverso la lingua araba; dall'arabo Adelardo di Bath traduce gli *Elementi* di Euclide in latino nel 1142. Nel secolo XII si forma una vera e propria equipe di traduttori, operanti principalmente in Spagna, terra in cui convivevano le culture cristiana, araba ed ebraica. Tra i traduttori vorrei ricordare Roberto di Chester, che, traducendo dall'arabo un testo di trigonometria, confuse (a quanto pare) la parola *jiba=semicorda* con la parola *jaib=baia* e scrisse "sinus", per cui la funzione con cui iniziano tradizionalmente i testi di trigonometria deve il suo nome attuale ad un errore di traduzione. L'errore è del resto giustificabile, in quanto nella lingua araba le vocali non vengono scritte. La seconda considerazione che vorrei fare è che gli Arabi, che diffondono in Occidente il sistema di numerazione indiano, non portano con loro altri aspetti caratteristici della matematica indiana, in particolare i numeri nullo e negativi. Personalmente penso sia perché loro stessi si legano alla cultura classica, alla cultura greca, cultura della vita, dell'armonia, del positivo, e sentono il fascino di essa: lo testimonia anche lo studio della filosofia greca da parte di uomini come Averroè.

Nel XIII secolo vengono tradotte in latino anche le opere di Archimede. Certamente le traduzioni di opere matematiche classiche non producono, al momento, chissà quale sviluppo della matematica e ciò non solo perché l'interesse degli uomini dotti è più rivolto verso le grandi opere filosofiche del passato, anch'esse riscoperte, ma anche per la difficoltà di diffusione: chi scriveva queste opere, sia pure tradotte, erano i monaci e quanto tempo occorreva per farne una copia? Chiaramente senza l'invenzione della stampa la diffusione di queste opere era decisamente faticosa.

Uno sviluppo enorme avviene, per la matematica, a partire dal XVI secolo e soprattutto dal XVII secolo, il secolo della nascita della Scienza Moderna della Natura con Galileo e poi con Newton. Prima, però, di trattare gli studi e le scoperte di tale periodo, vorrei dire che nel Rinascimento avvengono due fatti matematicamente estremamente importanti; entrambi sono di origine italiana ed entrambi verranno sviluppati essenzialmente nell'Ottocento. Il primo è lo studio della prospettiva, che si sviluppa in tutta Italia, soprattutto nel centro-nord, ad opera di grandi artisti, non solo italiani, quali Piero della Francesca, Leon Battista Alberti, Filippo Brunelleschi e così via, la cui arte nasce da una profonda cultura. Gli studi di questi artisti sono volti a trovare le regole esatte per dare, attraverso un'immagine piana, una corretta visione spaziale; forse si può dire che sono ancora più che altro "tecnici", ma spesso i risultati giungono attraverso vere dimostrazioni geometriche; ed è sulla base di quelle ricerche che nascerà, nel Seicento, la geometria proiettiva, geometria delle proiezioni e delle sezioni, un po' sommessamente, perché sarà opera solo di due scienziati, Girard Desargues e Blaise Pascal, e non avrà sostanzialmente eco, perché non fa trasparire quel grande sviluppo che si rivelerà solo nell'Ottocento; anzi, lo stesso Desargues riteneva che fosse un semplice completamento della geometria euclidea, mentre si rivelerà una geometria capace di contenere, come casi particolari, la geometria euclidea e quelle non euclidee.

Desargues e Pascal sviluppano un inizio di geometria proiettiva occupandosi delle sezioni coniche, già studiate da matematici greci, in particolare da Apollonio nel III secolo a.C.; ma di tali curve studiano proprietà legate proprio a proiezioni e a sezioni, mentre gli antichi si erano maggiormente concentrati sugli aspetti metrici. Vorrei a questo punto fare un'osservazione: ricordiamo quel frammento di Anassagora di cui ho parlato la volta scorsa, frammento in cui l'autore sembra intuire che un insieme infinito possa esser messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio; ebbene tale proprietà è stata probabilmente scoperta proiettando da un punto un segmento, che non lo contiene, su di un altro; la corrispondenza che si crea tra gli insiemi dei punti dei due segmenti è biunivoca, pur essendo i segmenti di diversa lunghezza, per dirlo alla buona, essendo uno più piccolo dell'altro, addirittura una parte propria dell'altro, traslata. Si può ritenere che Anassagora abbia ottenuto tale risultato attraverso studi di prospettiva scenografica. Il grande architetto romano Vitruvio racconta infatti che, nell'Atene del V secolo a.C., in cui una delle forme artistiche più elevate era la tragedia, Anassagora, e non solo lui (anche Democrito, per citare un altro filosofo), ha scritto un breve trattato su come rappresentare, nelle pitture sceniche, realtà tridimensionali su superfici piane. Quanto sopra mi porta a riflettere su come studi matematici, nel mondo culturale greco, come in quello rinascimentale, siano nati in profonda unione con elevate espressioni artistiche, la tragedia, la pittura; e ciò conferisce alla matematica un'immagine meno arcigna e più "simpatica" di quella solita, spesso lasciata negli studenti al termine delle scuole superiori. In realtà tutta la storia della matematica, con il suo svilupparsi insieme alla filosofia, alla fisica, alle varie scienze naturali e a quelle umane, alle più svariate applicazioni, e la storia dei matematici, con i loro errori, le loro debolezze, il loro impegno per la verità porta ad un'immagine di questa scienza ben diversa, se non opposta a quella così diffusa nella nostra società.

Gli studi di Desargues e Pascal, dicevo, non trovano diffusione e apprezzamento nel loro secolo non solo per le ragioni prima addotte, ma anche, forse soprattutto, perché prende il sopravvento, dopo la pubblicazione, nel 1637, del *Discours de la Méthode* di Cartesio, la geometria analitica, il cui impatto sullo studio di moltissimi problemi matematici e anche, di conseguenza, di quelli fisici che stanno nascendo, è tale che altri studi, anche originali, passano in secondo piano.

L'altro avvenimento matematico significativo del XVI secolo è quello che accade soprattutto intorno all'Università di Bologna. Nel Cinquecento alcuni matematici riescono a trovare la formula risolutiva generale per le equazioni di terzo grado; per la verità dovrei dire "le formule", che oggi vengono chiamate "formule di Cardano". Il motivo del plurale è dovuto al fatto che a quei tempi, non ammettendo coefficienti negativi nei polinomi, le equazioni di terzo grado erano divise in alcuni tipi a seconda che certi monomi fossero al primo o al secondo membro e i matematici hanno trovato varie formule a seconda dei diversi tipi di equazione. Gerolamo Cardano (1501-1576), studioso di varie discipline, non tutte razionali (era anche astrologo), tipico "genio universale" rinascimentale, effettivamente fu il primo a pubblicare le formule che portano il suo nome, nell'*Ars Magna*, che è il titolo con cui oggi quell'opera del 1545 è conosciuta, mentre il vero titolo sarebbe molto più lungo. In realtà le formule sono state trovate da Nicolò Fontana, detto il Tartaglia. Però Cardano non ha commesso un plagio. La storia è più complicata: ancor prima di Tartaglia era riuscito a risolvere le equazioni di terzo grado un matematico bolognese oggi quasi sconosciuto, Scipione Dal Ferro (per alcuni Del Ferro), che però non aveva pubblicato i suoi risultati. Quando si diffuse la notizia che anche Tartaglia aveva ottenuto le formule risolutive, Cardano riuscì a farsele rivelare, promettendo all'autore di non rivelarle. Quando, però, seppe che Scipione Dal Ferro le aveva trovate ancora prima, non si sentì più in dovere di mantenere il segreto come promesso a Tartaglia e le pubblicò, tra l'altro dicendo che gliele aveva date Tartaglia. Trovate le formule risolutive, o, possiamo dire, la formula risolutiva generale per le equazioni di terzo grado, dopo poco tempo un discepolo del Cardano, Ludovico Ferrari, trova anche quella per le equazioni di quarto grado e, a questo punto, nascono due filoni di ricerca estremamente significativi. Il primo, ovviamente, è quello teso a estendere i risultati ottenuti, quindi trovare una forma risolutiva generale per equazioni di grado n = 5, 6, …. I risultati che si ottengono sono stupefacenti, ma non per la facilità con cui si ottengono nuove formule e per la loro generalità, come ci si sarebbe potuto aspettare, ma esattamente per il contrario: solo nel 1799, infatti, il matematico e medico Paolo Ruffini (1765-1822), con una dimostrazione tutt'altro che semplice, "completata" nel 1813, giunge a stabilire che non esiste un'espressione radico-razionale (contenente, cioè, solo le quattro "operazioni" tradizionali ed estrazioni di radici) che sia soluzione di un'equazione generica di quinto, o sesto, … grado. Si tratta di un risultato negativo, certo non atteso e non desiderato dai matematici, la cui maggior parte non ne riconosce la validità; bisogna attendere la genialità matematica di Louis Augustin Cauchy (1789-1857), che lo riconosce valido, e gli studi di Niels Abel (1802-1829), che lo ritrova, senza conoscere l'opera del matematico italiano, nel 1824, perché il risultato abbia diritto di cittadinanza nell'algebra. Come spesso capita in matematica, dal risultato negativo di Ruffini e Abel scaturirà qualcosa di eccezionale: sarà infatti dalla sua dimostrazione che muoverà il "giovane favoloso" Evariste Galois (1811-1832) per i primi studi di algebra astratta, cioè dell'algebra delle strutture, una branca della matematica basata su una visione nuova, in cui l'interesse del matematico non è rivolto agli oggetti di un certo insieme, quanto ai legami che le operazioni pongono tra loro, grazie ai quali si forma, appunto, una struttura, più precisamente una struttura algebrica. Così insiemi diversi, su cui siano definite operazioni con le stesse proprietà, formano la stessa struttura algebrica e i risultati che si ottengono su di essa sono ovviamente validi per tutti gli insiemi su cui sia stata posta. L'idea di struttura verrà generalizzata: si creeranno strutture d'ordine, strutture metriche, etc., tanto che, intorno alla metà del Novecento, il movimento dei Bourbakisti dichiarerà che la matematica è "una rete di strutture". Quello che a questo punto ci interessa sottolineare è che da un problema di algebra classica, quello della soluzione di una generica equazione di grado maggiore di quattro, scaturisce, nel XIX secolo, un nuovo modo di studiare l'algebra, che nel giro di pochi decenni diventerà fondamentale per tutti gli studi matematici. Il secondo filone di ricerca algebrica nato nel Cinquecento scaturisce dalla necessità di capire che cosa sono certi strani "numeri", che compaiono nelle formule di Cardano. Le equazioni di secondo grado possono risultare senza soluzioni reali (impossibili in $\Re$); ciò capita quando il discriminante, Δ, è negativo; questi casi algebrici corrispondono a problemi geometrici senza soluzione: ad esempio, se si considerano, in un piano cartesiano, una circonferenza e una retta e se ne vogliono trovare i punti intersezione, si deve risolvere un sistema di equazioni di secondo grado; seguendo il procedimento risolutivo, si ha a che fare con un'equazione di secondo grado che può risultare impossibile in $\Re$; ma ciò capita quando la retta è esterna alla circonferenza, per cui le due linee non si intersecano; non c'è dunque bisogno di ampliare il campo numerico al fine di trovare soluzioni a quel sistema di secondo grado.

Il discorso è stato ben diverso quando i matematici si sono trovati davanti a certe equazioni di terzo grado e alle formule di Cardano, perché, dato un polinomio di terzo grado, la curva che rappresenta il suo grafico -adesso sto usando, ovviamente, la geometria cartesiana- o ha una sola intersezione con l'asse x o ne ha tre; il che equivale a dire che l'equazione che si ottiene uguagliando a 0 il polinomio o ha 1 sola soluzione reale o ne ha 3; il caso più interessante è quando ne ha tre; perché proprio in questo caso, per arrivare alle soluzioni di tale equazione, bisogna passare attraverso le radici quadrate di numeri negativi. Allora gli studiosi del '500 hanno cominciato a chiedersi: cosa sono questi numeri? Queste radici quadrate di numeri negativi? E un matematico, anche questo troppo facilmente dimenticato, Rafael Bombelli, un altro matematico bolognese, scrive nel 1572 un testo, intitolato *L'algebra*, che introduce quelli che oggi chiamiamo i numeri complessi.

Non ne dà una definizione rigorosa, ma fornisce le regole con cui operare con tali strani oggetti matematici, facendo in modo che le operazioni che introduce abbiano le stesse proprietà delle loro analoghe in $\Re$. Del resto l'aritmetica e l'algebra classiche si sono sempre sviluppate in maniera rigorosa non certamente partendo da postulati, ma sviluppando ragionamenti, spesso basati su intuizioni, di cui si riconosceva la validità logica e che davano luogo a sempre più significativi calcoli e applicazioni. Questo può dirsi anche dell'unica branca assiomatizzata dall'antichità grazie all'opera di Euclide, la geometria (l'aritmetica verrà assiomatizzata verso la fine del XIX secolo), perché in generale la genesi e lo sviluppo di una teoria matematica precede il momento della riflessione sui fondamenti e sul rigore dei procedimenti; come Euclide "sistema" assiomaticamente la geometria greca dopo più di due secoli in cui tale scienza è stata sviluppata, così saranno i matematici dell'Ottocento a porsi il problema di dare una base sicura e a sistematizzare quanto emerso nei secoli dell'era moderna, in particolare il calcolo infinitesimale, e allora anche i numeri complessi verranno introdotti in maniera rigorosa, come coppie ordinate di numeri reali. Quello che vorrei sottolineare è che oggi noi operiamo con i numeri complessi come operava Bombelli. Mi sono soffermato su quelli che forse possono essere considerati i due studi matematici più importanti del periodo rinascimentale, ma a questo punto è giusto che ci si occupi di quel fiorire di studi e ricerche che, come abbiamo accennato, inizia verso la fine del XVI secolo. Non si tratta solo di studi strettamente matematici: abbiamo già ricordato che, con l'opera di Galileo (1564-1642) e di Newton (1642-1727), per citare solo coloro che hanno dato il metodo (Galileo) e le leggi fondamentali della scienza del movimento (Newton), nasce la scienza moderna della natura, nasce cioè una ricerca del tutto nuova, che, per quanto all'epoca si continui a chiamarla "filosofia della natura", "filosofia naturale", in realtà, per i risultati che si propone di ottenere e il metodo che usa, è totalmente distinta da una ricerca di tipo filosofico. Ci possiamo chiedere perché sorga tanto fiorire di studi...ci possono essere tanti motivi... io mi permetto di indicarne alcuni: uno dei motivi, sicuramente, per quanto riguarda la matematica, è la riscoperta, o meglio la diffusione, delle opere antiche, in particolare dell'opera di Euclide e di quella di Archimede. Insisto sulla diffusione, perché abbiamo già visto che nel Medioevo i grandi classici matematici erano stati tradotti, ma solo dalla metà circa del XV secolo, con l'invenzione della stampa, diventa possibile per molti studiosi accedere alla loro lettura in tempi molto più rapidi. Tartaglia stesso fa pubblicare a stampa, intorno alla metà del Cinquecento, l'opera completa, s'intende, che si conosceva allora, di Archimede.

Un altro motivo, e qui mi ricollego a questioni di filosofia, è la volontà, abbastanza evidente in alcuni dei personaggi più significativi del XVII secolo, di recuperare una razionalità, perché è innegabile che nel XV e soprattutto nel XVI secolo la passione per la natura e certe linee culturali che ne scaturivano-la natura è intrinsecamente buona; basta seguire la natura per essere buoni in qualche maniera; e così via-[ho detto certe linee culturali, lungi da me l'idea che tutto il Rinascimento sia questo, tutt'altro]; certe linee, dicevo, avevano portato anche ad un irrazionalismo, tanto è vero che era fiorita la magia, era fiorita l'alchimia, etc. Contro certe forme di pseudosapere si battono, in maniera estremamente decisa, coloro che si possono considerare i primi fondatori della scienza moderna, Galileo e Cartesio. Galileo non voleva nemmeno parlare di forze, perché temeva che attraverso esse si introducesse nello studio della natura ancora qualcosa di arcano e di occulto; la fisica galileiana è infatti cinematica, uno studio del movimento, ma non delle sue cause. Innegabilmente un'esigenza di razionalità è presente anche in Francesco Bacone (1561-1626), anche se questi non ha creato un metodo scientifico; però, nel momento in cui dice "dobbiamo trovare un *novum organum*" per studiare la natura, il riferimento all'*Organon,* l'insieme delle opere di logica di Aristotele, un complesso di veri e propri trattati sulla teoria della conoscenza scientifica, indica chiaramente l'esigenza di trovare un metodo nuovo di conoscenza. Accanto ai motivi fin qui esposti, ce n'è un altro di non trascurabile importanza per la nascita della scienza moderna nel XVII secolo, ed è il fatto, del tutto provvidenziale, che fiorisca, in quel periodo, un sacco di belle menti; credo che anche Atene nel V secolo non sarebbe stata niente, se non ci fossero state tutte quelle menti... E questa è una cosa imprevedibile, credo proprio che non sia una cosa di cui si possa dire "è successo per questo": nel Quattrocento, che ci fossero Mantegna, Piero della Francesca, etc. etc., a chi è dovuto?

Ebbene, cos'è che nasce effettivamente tra la fine del XVI e tutto il XVII secolo? Nasce la teoria dei logaritmi, nasce proprio all'inizio del Seicento, grazie soprattutto all'opera di quello che noi abbiamo sempre chiamato Nepero (John Napier, 1550-1617), uno scozzese che, amministrando il suo patrimonio, capisce che, nelle moltiplicazioni e nelle divisioni, lavorare sugli esponenti è più facile che lavorare sulle potenze; infatti, se si deve fare il prodotto di due numeri, reali, positivi, b e c, se questi sono entrambi potenze dello stesso numero, anch'esso reale e positivo, oltre che diverso da 1, a, di esponente rispettivamente k e n, si ha $b{\cdot}c = a^k \cdot a^n = a^{k+n}$; analogamente $b{:}\,c = a^k{:}a^n = a^{k-n}$ (all'epoca si supponeva k >n). Perciò, se conosciamo gli esponenti cui elevare a per avere b e c (cioè i logaritmi in base a di b e c), non sarà difficile effettuare la somma $k + n$ (o l'analoga differenza) e non ci resta che calcolare la potenza a^{k+n} (a^{k-n}), cosa che può apparire, forse essere, tanto complicata quanto la moltiplicazione, o divisione, di partenza. Per questo sono state elaborate opportune "tavole dei logaritmi", che molti di noi, di una certa età, hanno sicuramente usato a scuola: le tavole permettono di conoscere il logaritmo, in una certa base, positiva, diversa da 1, di un qualunque numero positivo e viceversa, cioè, dato un numero reale, stabilire di quale numero esso è il logaritmo, sempre con la stessa base; tutto ciò, naturalmente, nella stragrande maggioranza dei casi, in forma approssimata. Pertanto, per fare il prodotto di due numeri positivi piuttosto complicati, si possono trovare, grazie alle tavole, i loro logaritmi in una base prefissata, farne quindi la somma, che non è altro che il logaritmo del prodotto dei numeri di partenza, e in conclusione, sempre usando le tavole, con procedimento inverso, ricavare dal suo logaritmo il prodotto cercato.

Un po' più avanti nel tempo, sempre nel XVII secolo, nascono le prime forme di matematica finanziaria, nasce il calcolo delle probabilità, nascono le macchine calcolatrici, di cui il primo esempio è il *counting clock*, l'orologio contante dello scienziato tedesco Wilhelm Schickard (1592-1635), che precede di una ventina di anni la famosa macchina di Pascal (la "Pascalina"), che a sua volta precede la macchina di Leibniz: le prime due facevano solo addizioni e sottrazioni, quella di Leibniz faceva anche moltiplicazioni e divisioni, sia pure con un metodo piuttosto lento. Nel giro di pochi anni, quindi, possiamo dire che si verifica un salto notevolissimo. Ma il cuore, il centro di tutta la grande avventura matematica del XVII secolo è rappresentato dalla Geometria Analitica e successivamente dal Calcolo Infinitesimale. Per quanto riguarda la prima, possiamo dire che coloro che l'hanno "creata" sono, come già ricordato, Cartesio e Fermat, che sono più o meno contemporanei; noi siamo da tempo abituati a darne implicitamente tutto il merito a Cartesio, tanto da parlare di "geometria cartesiana"; anche se ciò non è del tutto giusto, la cosa ha una sua giustificazione: Cartesio ha capito che l'algebra è uno strumento più potente della geometria, in quanto sostanzialmente l'algebra è un calcolo universale. Per lui la matematica è scienza della quantità generale e lo è proprio grazie all'aritmetica-algebra, i cui procedimenti possono servire – lo dice esplicitamente – se si studiano i moti celesti, se si fanno i conti di casa e così via. I secoli successivi gli daranno ragione in una maniera ben più profonda e ampia di quanto lui potesse immaginare: nell'Ottocento la ripresa degli studi geometrici, grazie alle sue coordinate, che sono numeri reali, coppie ordinate di numeri reali, terne ordinate di numeri reali, porta allo sviluppo completo della Geometria Proiettiva, iniziata da Desargues e Pascal, come ricordato. Questa geometria si fonda sulle coordinate proiettive, un'estensione dell'idea di coordinate cartesiane, che permette di rappresentare algebricamente anche "punti all'infinito", con conseguenze di grande portata, come il fatto di poter trasformare, attraverso una funzione di primo grado, un'iperbole, curva illimitata, in un'ellisse, che invece è limitata, e viceversa. Verso la fine dell'Ottocento, poi, si svilupperà, passando dalle coppie o terne ordinate di numeri reali alle n-ple ordinate degli stessi, con n numero naturale qualunque, una Geometria per spazi a dimensione maggiore di tre, che risulterà indispensabile allo studio matematico della teoria della relatività. Chissà cosa avrebbe detto Cartesio di fronte ad un tale ampliamento dell'idea di spazio geometrico, lui che riteneva inutile una matematica che andasse al di là delle tre dimensioni, perché il mondo non aveva altro che tre dimensioni! Tanto più vedendo che proprio sulla base della "sua" geometria i successori di fine ottocento iniziavano a studiare perfino spazi di dimensione infinita. Certo i geni aprono nuove strade, che neanche loro possono immaginare dove porteranno, perché la realtà è più grande di quello che anche il genio riesce a vedere. La seconda novità che costituisce il cuore dell'avventura del Seicento matematico è il calcolo infinitesimale, ma anche qui dobbiamo partire da Cartesio. E' lui, anche in questo caso, per essere precisi, non da solo, che realizza una seria semplificazione del simbolismo algebrico: è a lui che dobbiamo a^3 per indicare il cubo di un numero a, x^2 per indicare il quadrato dell'incognita x e così via. Per comprendere la portata della semplificazione simbolica cartesiana basta pensare che la famosa formula risolutiva delle equazioni di terzo grado, consegnata da Tartaglia a Cardano, era scritta in terzine:

"quando che 'l cubo con le cose appresso

se agguaglia a qualche numero discreto…",

dove, come ancora prevalentemente in uso nel Cinquecento, il cubo di un numero viene indicato con la parola "cubo", il quadrato con la parola "censo", l'incognita con la parola "cosa" (spesso in maniera sincopata, cu, ce, co). Le righe riportate di Tartaglia indicano dunque l'equazione $x^3 + px = q$, dove q è "qualche numero discreto" e p e q sono rigorosamente positivi. Si capisce al volo come, perché un calcolo sia efficace per raggiungere i risultati cercati, sia necessario che il simbolismo sia semplice e senza ambiguità, potremmo dire il più possibile trasparente; l'esempio precedente mostra quanto Cartesio abbia semplificato il simbolismo algebrico. Chi coglie al volo l'importanza della riforma cartesiana? Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Questi "critica" Cartesio perché "si è fermato ad un certo punto", come dire che non ha colto tutta la portata della sua stessa visione della matematica. Cartesio ha pensato la matematica come scienza della quantità generale, ma, seguendo il pensiero di Leibniz, per descrivere l'ordine del mondo, bastano le relazioni di quantità? Cartesio ha capito la centralità dell'algebra, ma basta l'algebra classica o non è necessario, invece, pensare anche ad un'algebra di quantità variabili, ad esempio piccole a piacere (noi diremmo "piccole a piacere in modulo"), un **calcolo infinitesimale?** Cartesio, infine, ha capito l'importanza del calcolo su un simbolismo opportuno, ma non si potrebbe pensare ad un calcolo più ampio, con il suo simbolismo, che aiuti il pensiero umano in tutte le problematiche? Un'algebra, insomma, del pensiero, un **calculus ratiocinator**, che permetta di ragionare senza sbagliare, come il calcolo algebrico permette, se utilizzato bene, di giungere a risultati esatti. Qui vorrei sgomberare subito il campo da interpretazioni errate: Leibniz pensa ad un simbolismo e ad un calcolo che non sono assolutamente sostitutivi del pensiero; egli non concepisce un'algebra della logica fine a se stessa; come metafisico, è convinto che "il pensiero pensa l'essere" e il calcolo sui simboli, che devono essere chiari in ciò che significano, aiuta il pensiero, come lo aiuta il calcolo algebrico, che noi svolgiamo quasi automaticamente, ma dietro il quale ci sono i significati delle operazioni, che noi conosciamo; sappiamo infatti cosa vuol dire aggiungere, quello che significa moltiplicare, etc. Ebbene, Leibniz cerca di rispondere alle domande che ho appena esposto. Egli pensa che la realtà del mondo è una realtà ordinata, nell'universo c'è un ordine, che però cambia, un ordine necessario, ma contingente; ma, se la matematica è la mathesis universalis, la scienza universale, che studia l'ordine che Dio dà all'universo, essa non può limitarsi a studiare le relazioni di quantità, non può essere solo, cartesianamente, scienza della quantità generale. Ci sono, infatti, relazioni tra figure che non sono di tipo quantitativo; due triangoli, ad esempio, possono essere equivalenti, cioè avere la stessa area, ma possono essere simili, sostanzialmente, cioè, della stessa forma, ma con aree diverse, in altre parole avere, tra loro, una relazione di similitudine. Così pure, se nel piano due figure sono tali che ad ogni punto dell'una ne corrisponde uno dell'altra, dalla parte opposta, ma alla stessa distanza da una certa retta, noi diciamo che tra le due figure c'è una relazione di simmetria, che è comunque una relazione "di posizione". In fondo le stesse operazioni sono relazioni, che associano, con linguaggio attuale, a coppie ordinate di numeri di un certo insieme numerico un altro numero dello stesso insieme. La matematica, allora, se vuole veramente studiare ed esprimere l'ordine dell'universo, deve diventare scienza della relazione e questo ampliamento di visione della nostra scienza è dovuto proprio alla genialità di Leibniz. Non per niente viene in genere attribuita a lui l'introduzione del termine "funzione", anche se non è detto che sia stato il primo ad utilizzarlo. Del resto la centralità delle funzioni nello studio della fisica, in quel momento tra la fine del Seicento e il Settecento, non tarda a farsi notare; se ai tempi di Leibniz si parlava ancora di massimi e minimi di curve, a poco a poco si comincerà a parlare di massimi e minimi di funzioni, di cui certe curve sono grafici, e questo nel tempo diventerà sempre più importante, soprattutto per lo studio di funzioni di più variabili reali, ad esempio di tre variabili, perché il grafico, in questo caso, è in $\Re^4$, dove non abbiamo nessuna intuizione visiva. E il mutamento dell'ordine dell'universo avviene con **continuità**. Questo concetto, già presente nella cultura ellenica, riemerge nel Seicento, ma, direi, non più in maniera problematica; i matematici del XVII secolo, pur dibattendo sulla composizione del mondo, appaiono convinti che la realtà sia continua: Galileo chiama lo spazio "il continuo", Newton considera le grandezze matematiche "come generate da un moto continuo" (*Tractatus de quadratura curvarum*) e per Leibniz "natura non facit saltus", per cui le funzioni da studiare, rappresentative di fenomeni della natura, sono funzioni continue. Leibniz allora capisce che si deve creare un nuovo calcolo, non su quantità finite (l'algebra tradizionale), ma su quantità piccole a piacere, gli "infinitesimi", soprattutto su differenze piccole a piacere, perché studiare un ordine che varia a poco a poco, quindi studiare dei mutamenti "piccoli a piacere", equivale a studiare le differenze tra i valori che certe funzioni assumono in punti vicini tra loro quanto si vuole.

Nasce così il calcolo differenziale, di cui Leibniz dà le regole. Sappiamo tutti che il calcolo differenziale, o, meglio, il calcolo infinitesimale viene considerato una creazione sia di Leibniz, sia di Newton. E' vero che molti grandi uomini di scienza hanno contribuito, con i loro studi, alla nascita di tale nuova branca della matematica; come ho detto prima, è stato un fiorire di menti e di studi; però, sicuramente, coloro che hanno individuato e fornito dei metodi generali sono stati Newton e Leibniz ed è significativo che venga considerata nascita del calcolo infinitesimale l'apparizione, negli *Acta eruditorum*, a Lipsia, nel 1684, della memoria leibniziana dal lungo titolo (sarebbe in latino) "Nuovo metodo per i massimi e i minimi, come pure per le tangenti, che non si arresta davanti a quantità frazionarie o irrazionali, ed un singolare genere di calcolo per quei problemi". Vorrei sottolineare l'importanza di quel "che non si arresta…", che mostra come Leibniz sia consapevole della profonda novità del suo metodo, applicabile ad una classe di funzioni molto vasta, mentre fino a quel momento i matematici riducevano le applicazioni da derivare (termine allora non usato) a forma razionale intera, cioè a polinomi, con evidente allungamento e complicazione dei calcoli. Mi sono soffermato essenzialmente su Leibniz perché dietro il suo metodo c'è una visione filosofica precisa, la visione di un ordine della realtà, che muta e muta con continuità, muta per piccoli passi. Per questo, come abbiamo visto, introduce gli infinitesimi, concetto che non appare chiaro a molti suoi contemporanei e successori immediati, tanto che, sia nei confronti della sua opera che di quella di Newton, fioriscono critiche e, peggio ancora, gravi incomprensioni. Durante il Settecento i matematici, anche i più grandi, continuano a dibattere sulla natura degli infinitesimi, spesso non capendo di fatto cosa fossero. Sarà Louis Augustin Cauchy (1789-1857) che nel 1821, scrivendo le dispense per gli studenti dell'Ecole Polytechnique, darà definizioni rigorose, e quindi chiarirà in maniera sostanzialmente definitiva i concetti basilari del calcolo infinitesimale, partendo da quel concetto di limite, che oggi tutti noi consideriamo la base del calcolo infinitesimale, ma che, nei secoli precedenti, non era stato considerato granché, nonostante l'avesse indicato come fondamentale anche Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783), con tutta la sua autorevolezza. È certamente provvidenziale che i matematici del Settecento, pur nell'oscurità dei concetti, abbiano sostanzialmente colto che il calcolo leibniziano era vero e che rendeva un grande servizio non solo alla matematica, ma alla fiorente scienza della natura di quel periodo. Non mi soffermo sul "sogno" leibniziano di un'algebra del pensiero, un calculus ratiocinator, che sia al servizio di tutto il ragionamento umano: sarà nell'Ottocento che altri raccoglieranno lo spunto del filosofo di Lipsia e nascerà l'algebra della logica, la cui paternità è comunque universalmente riconosciuta a Leibniz.

Secolo XIX: sistematizzazione rigorosa del calcolo, nuovi mondi matematici, problema dei fondamenti

Noi oggi dobbiamo parlare del XIX secolo, che è sicuramente un secolo matematicamente ricchissimo. Esso nasce ponendosi tutte le problematiche che erano rimaste non risolte dal grande sviluppo scientifico del XVII secolo, quando erano sorte, come abbiamo visto, branche matematiche totalmente nuove; tra queste fondamentale è il calcolo infinitesimale, che però, come abbiamo detto, si era sviluppato senza badare troppo al rigore dei fondamenti. Questo io credo che sia una cosa che è successa un po' sempre, nel senso che l'aspetto della sistematizzazione rigorosa di una teoria è normalmente successivo rispetto alle nuove scoperte, ai nuovi orizzonti della matematica, frutto di geniali intuizioni e/o di laboriose ricerche, magari condotte in modo operativo, come abbiamo visto con il lavoro di Bombelli sui numeri complessi. Il calcolo infinitesimale, però, poneva alla sua base qualcosa di veramente oscuro, appunto l'infinitesimo: una quantità trascurabile? O addirittura un puro nulla? E poi il concetto di infinitesimo si collegava strettamente a quello di infinito, essendo qualcosa di infinitamente piccolo, e l'infinito si presentava già come problematico; c'era nel Seicento un grosso dibattito su di esso e sfuggiva che certe proprietà degli insiemi infiniti dovessero essere diverse da quelle degli insiemi finiti, per cui tale diversità veniva usata per concludere che era assurda l'idea di infinito in atto. Al riguardo vorrei sottolineare la posizione, che invece appare apertissima, di Galileo, per il quale il "continuo" è formato da infinite parti, "che non siano quante", cioè che siano prive di dimensione. Infinite parti; dunque per Galileo la mente umana può pensare l'infinito in atto, che non è contraddittorio, perché le proprietà degli infiniti, che a noi appaiono "strane", testimoniano solo, per lo scienziato pisano, una profonda e naturale diversità di ciò che è infinito da quanto fa parte del nostro mondo quotidiano, che è limitato. È impossibile qui non notare la profonda influenza che il pensiero platonico-agostiniano esercita su Galileo, e non solo su di lui; è infatti innegabile che buona parte della cultura filosofico-scientifica del XVII secolo si sviluppa da quel pensiero. Non posso, a questo punto, non ricordare la seguente affermazione di Galileo, tratta dai "Discorsi e dimostrazioni intorno a due nuove scienze" (1638), dove l'influsso platonico-agostiniano appare evidente: "se numero alcuno può dirsi infinito, questo" è "l'unità. E veramente in essa son quelle condizioni e necessarii requisiti del numero infinito, dico del contenere in sé tanti quadrati quanti cubi e quanti tutti i numeri". A riguardo dell'infinito Leibniz tende piuttosto a sorvolare su difficoltà e obiezioni, dedicandosi piuttosto a sottolineare che il calcolo infinitesimale "funziona", da esso si ottengono risultati veri. Egli non è contrario alla possibilità della mente umana di pensare l'infinito in atto, come si evince dal suo seguente passo "je suis tellment pour l'infini actuel qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte partout pour mieux marquer la perfection de son Créateur"[4]; tuttavia non si sofferma granché sulla domanda di cosa siano gli infinitesimi, più preoccupato, come ho detto, di affermare che il suo nuovo metodo funziona e con esso si può studiare la realtà empirica, anche se a volte, di fronte alle obiezioni, risponde che gli infinitesimi si possono pensare come "finzioni" o "enti ideali", oppure che sono quantità piccole a piacere. Quest'ultima risposta fa vedere come Leibniz in realtà abbia una visione chiara dei suoi enti primitivi, mentre l'altra appare più un "tanto per chiudere il dibattito", anche se, azzarderei, agli occhi del matematico di Lipsia, anche lui di matrice platonico-agostiniana, l'idea di aver a che fare con enti ideali doveva apparire abbastanza allettante. Come abbiamo visto nel secondo seminario, il problema di quale sia il fondamento rigoroso del nuovo calcolo infinitesimale si protrae nel Settecento e viene sentito fortissimamente in particolare da Joseph Louis Lagrange (1736-1813): egli vede che, dopo il grande successo ottenuto dai matematici del XVII, ma soprattutto del XVIII secolo nell'applicazione della matematica alla nuova scienza della natura, sta iniziando, verso la fine del secolo,

[4] G.W. Leibniz, Die philosophischen Schriften a cura di C.J. Gerhardt, 1875-90, lettre a Foucher, riportato in E. Carruccio, Appunti di Storia delle matematiche, della logica, della metamatematica, Pitagora editrice, Bologna

un periodo di crisi, “a meno che qualcuno non scopra nuovi filoni”, e ritiene che sia necessario porre su basi rigorose il calcolo differenziale. È probabile che sia stata sua l’idea, nel 1784, ad un secolo esatto dalla famosa memoria di Leibniz considerata ancor oggi l’origine del calcolo infinitesimale, di bandire un concorso con un premio che sarebbe stato assegnato a chi avesse presentato la migliore teoria chiara e precisa su cosa s’intende per infinito in matematica. Questo concorso, bandito dall’Accademia di Berlino, in cui lo stesso Lagrange è Direttore della classe di Scienze, viene vinto dallo svizzero Simon Lhuilier, la cui opera, tuttavia, oggi dimenticata dalla comunità scientifica, non è risultata una vera soluzione del problema. Neanche Lagrange stesso, del resto, riuscirà nell’impresa di fondare rigorosamente il calcolo infinitesimale e si dovrà attendere l'Ottocento, secolo che per certi versi può essere accostato al V secolo a.C. ellenico, per poter dire di essere riusciti in tale impresa, direi nei limiti del possibile. Il prosieguo chiarirà questa cautela. Chi risolve il problema non è una persona sola: come sempre, c’è un fiorire di studi relativi a ciò che stiamo trattando, però la figura di riferimento è Louis Augustin Cauchy, come ho accennato verso la fine del precedente incontro. Cauchy era professore all'Ecole Polytechnique e, siamo nel 1821, sollecitato da altri matematici, ma soprattutto per rispondere alla fondamentale esigenza degli studenti di comprendere i concetti basilari - cosa che non sempre viene presa in considerazione oggi nelle nostre università- comincia a scrivere le dispense del suo corso, *Cours d’Analyse*, e dà le definizioni, che oggi noi conosciamo, di limite e quindi di infinitesimo, una variabile “che ha zero come limite”, e di infinito, una variabile i cui successivi valori numerici “crescono sempre più, in modo da superare ogni numero dato” (sto seguendo qui, in maniera fedele, il testo “Il flauto di Hilbert” di Umberto Bottazzini). Oggi noi usiamo termini diversi per le stesse definizioni, ma non è difficile riconoscere che le definizioni di Cauchy, in parte accennate, esprimono, nella sostanza, ciò che noi intendiamo quando parliamo di certi concetti. Successivamente, nelle stesse dispense, Cauchy definisce la continuità di una funzione, la derivata e l’integrale, sempre basandosi sul fondamentale concetto di limite, che, come abbiamo visto, già diversi grandi matematici, tra cui D'Alembert, avevano indicato come la base essenziale per dare rigore a tutto il calcolo infinitesimale. Alcune di queste definizioni erano state anticipate dal monaco boemo Bernhard Bolzano (1781-1848) qualche anno prima, ma è chiaramente l'opera sistematica di Cauchy, già noto ed autorevole per le sue ricerche, che diventa la pietra miliare per la ricostruzione rigorosa del calcolo infinitesimale e, come stiamo per vedere, di tutta la matematica. Infatti il lavoro di Cauchy, che dà le basi del calcolo infinitesimale, richiede di chiarire alcuni concetti che sono a priori rispetto al calcolo stesso, a cominciare dal concetto di funzione, che non era ancora stato definito rigorosamente. Si assiste così ad una sorta di procedimento a ritroso sulle basi delle varie teorie matematiche che si erano sviluppate e si stavano sviluppando: una volta chiarito il concetto di funzione, ci si accorge che dal Seicento si sta lavorando con funzioni che, in genere, associano numeri reali a numeri reali o a ennuple di essi, funzioni che chiamiamo funzioni reali di una variabile reale o di più variabili reali, e sorge la domanda: cosa sono questi numeri reali? In fin dei conti i numeri reali erano sempre stati accettati dai tempi in cui erano venute fuori le radici quadrate già nel periodo greco classico, per non parlare della capacità dei Mesopotamici di calcolare radici quadrate; però non erano mai stati definiti rigorosamente. Siamo ormai nella seconda metà dell'Ottocento e i principali centri di ricerca di analisi matematica, e non solo, sono tedeschi, Berlino, Gottingen, per citare i più prestigiosi dell'epoca. Ed in effetti il primo a formulare una teoria dei numeri reali basata sugli insiemi numerici "precedenti", quelli dei naturali, degli interi, dei razionali, è Karl Weierstrass (1815-1897), professore a Berlino. Egli non pubblica nulla su tale teoria, ma la espone nelle sue lezioni, per cui viene diffusa dai suoi allievi. Tra questi c'è Georg Cantor (1845-1918), in realtà nato a San Pietroburgo da padre danese e madre nata anche lei in Russia, ma di origini austriache, e ciononostante da sempre considerato, a ragione, un matematico tedesco, visto che da quando aveva 11 anni è vissuto in Germania. Cantor è noto a molti, perché universalmente riconosciuto come "padre" della teoria degli insiemi;

meno noto è Richard Dedekind (1831-1916), il matematico, anche lui tedesco, associato a Cantor perché entrambi hanno dato, in due maniere molto diverse, una definizione rigorosa dei numeri reali, basata sulla teoria dei numeri razionali. Forse avrete notato che sto parlando di tanti matematici “tedeschi”, anche se in realtà la Germania, come nazione unitaria, nasce nel 1871; prima, insieme alla Prussia, che era già potente, c’erano diversi piccoli stati, tutti comunque da considerare senza dubbio tedeschi. Il fiorire della matematica tedesca nella seconda metà del XIX secolo non meraviglia: nel primo ventennio del secolo la politica prussiana, in particolare riguardo all’istruzione, è influenzata da Wilhelm von Humboldt, che non è un matematico, è piuttosto un linguista, filosofo, sostanzialmente un umanista, che coglie il fatto che in Francia si sta riprendendo a studiare matematica alla maniera classica; se durante e subito dopo la Rivoluzione gli studi matematici si erano sviluppati soprattutto in vista di applicazioni militari, poi, sotto l’influsso di Lagrange e di Cauchy, si riprende, come in fondo abbiamo già visto, a focalizzare lo studio sullo sviluppo di teorie astratte. È questa la strada che intraprende la matematica prussiana e di lì a poco le Università di Berlino e di Gottingen diventano i centri principali della cultura matematica dell'Ottocento. Non dobbiamo per altro dimenticare che a Gottingen il direttore dell'Osservatorio Astronomico era un certo Gauss e che dopo di lui quell’Ateneo ha ospitato Dirichlet, Riemann, Landau, Hilbert. Riprendiamo il nostro discorso sull’introduzione dei numeri reali e soffermiamoci sugli studi di Dedekind. Questi scrive un libro, nel 1872, intitolato *Continuità e irrazionali*; il titolo è decisamente espressivo: infatti in quest’opera Dedekind dà finalmente la definizione di continuità e quella di numero irrazionale. Ho detto nel primo di questi incontri che il problema della continuità era già sorto nella filosofia e nella matematica ellenica, presumibilmente durante il V secolo a.C.: i Greci avevano capito che c'era l'esigenza di fare i conti con la continuità, ma non sono riusciti ad esprimere questo concetto in maniera rigorosa, per cui non lo hanno utilizzato nella elaborazione delle loro teorie matematiche. Abbiamo già visto che nel Seicento, nonostante non si fosse ancora trovata una definizione soddisfacente di continuità, che la realtà fosse continua veniva dato per scontato: Galileo, quando parlava dello spazio, parlava del continuo e Leibniz sosteneva, come è noto, che ogni fenomeno naturale avviene con continuità: natura non facit saltus è una frase sua. Ebbene Dedekind dice cosa si deve intendere con continuità mediante un postulato, il "postulato della continuità della retta", un postulato di geometria, come il nome stesso fa trasparire. Io lo dico in maniera un po' "più contemporanea", ma la sostanza è quella di Dedekind: prendiamo un segmento AB (Dedekind prende una retta, ma io preferisco parlare di segmento) e dividiamolo in due parti, ma in una certa maniera, cioè in maniera che ogni suo punto stia o nell'una o nell'altra, ma in una sola delle due (noi potremmo dire tutto ciò, avendo chiamato le due parti rispettivamente I_1 e I_2, affermando che $I_1 \cup I_2$ è tutto il segmento AB, perché ogni suo punto sta o in una o nell'altra, quindi sta nell'unione, ma anche che $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, perché sta in una sola delle due parti, il che vuol dire che l'intersezione delle due parti è vuota, I_1 e I_2 sono due insiemi disgiunti), e inoltre che ogni elemento di I_1-diremmo noi- preceda-linguaggio geometrico, giustamente, stiamo parlando di Geometria- ogni punto di I_2. In tali circostanze, dice Dedekind, esiste un solo punto, chiamiamolo pure C, tale che ogni punto che lo precede sta in I_1 e ogni punto che lo segue sta in I_2. Detto in parole povere, per come abbiamo spaccato il segmento, in mezzo non troviamo un buco, troviamo sempre un punto, un punto che non li congiunge, perché ovviamente questo punto starà in I_1 oppure in I_2, ma non può stare in entrambi, per le ipotesi poste, però è sicuramente quello che determina la continuità, quello che determina il fatto che se noi camminiamo su un marciapiede, che può essere considerato un segmento, non troviamo il tombino aperto, qualunque tombino è stato comunque chiuso, il punto C è il coperchio del tombino. Dedekind si rende conto che in fin dei conti la continuità, così come lui la intende, è un'idea piuttosto naturale, tanto che arriva a dire: molti di quelli che leggeranno queste note, si meraviglieranno che il principio nascosto per tanti secoli si riduca a questa banalità. Ma altra cosa interessante è che la continuità è ciò che, in un certo senso, gli permette di introdurre i numeri irrazionali. Dedekind infatti parte ancora da un'idea di divisione, di "sezione": precisamente divide l'insieme Q dei numeri razionali in due classi, in maniera che ogni elemento della prima sia minore di ogni elemento della seconda. È evidente che si tratta della stessa idea che è alla base del postulato della continuità della retta, ma formulata in ambito algebrico, dove la relazione d'ordine (un numero minore di un altro) prende il posto di quella di precedenza (un punto precede un altro).

Qui, però, c'è un problema: tra le due classi può rimanere un numero razionale come può non rimanere alcun numero razionale.

Forse lo sto dicendo in maniera abbastanza veloce e magari non troppo rigorosa, però, tanto per capirci, se considero tutti i razionali negativi e tutti i razionali positivi, ho escluso lo 0, in mezzo rimane lo 0, che è un numero razionale; ma se io metto nella classe A tutti i numeri negativi, lo 0, e tutti i numeri positivi che hanno quadrato minore di 2, e nella classe B tutti i numeri positivi che hanno quadrato maggiore di 2, chiaramente in mezzo non c'è niente, o meglio, non c'è un numero razionale, perché tra i numeri positivi che hanno quadrato minore di 2 e i numeri positivi che hanno quadrato maggiore di 2 ci potrebbe stare solo un numero positivo che ha il quadrato uguale a 2, la famosa radice quadrata di 2, che già i Greci avevano visto non essere razionale. Ebbene, laddove, effettuando un taglio, o sezione, come oggi si preferisce, di Q, questo taglio, questa sezione non esclude nessun elemento razionale, come, appunto, nel nostro secondo esempio, allora si determina un nuovo numero, questo taglio individua un nuovo numero, noi oggi diciamo definisce, è, un nuovo numero, che è un numero irrazionale, appunto perché non razionale. Su ciò vorrei soffermarmi un momento. Nella mente di Dedekind è chiaro che si ha a che fare non solo con un numero nuovo, ma, soprattutto, con un modo del tutto nuovo di introdurre dei numeri; forse per questo non dice che il taglio "è" un numero, usa termini diversi, dicendo che "creiamo" un nuovo numero, "completamente definito" dalla sezione, e anche che "corrisponde a questa sezione e che esso la produce" (Bottazzini, Il flauto di Hilbert). Se riteniamo essenziale quel "completamente definito dalla sezione", possiamo affermare che, per Dedekind, il numero reale è la sezione stessa, mentre l'espressione "corrisponde a questa sezione" può dare la sensazione che ci sia qualcosa da chiarire dal punto di vista puramente logico. Non sto ad entrare nei particolari delle vicende che sono seguite alla pubblicazione del testo, rilevo solo un problema: chiaramente, se noi introduciamo i numeri irrazionali come sezioni di Q, gli stessi numeri razionali devono essere "identificati" con quei tagli che lasciano fuori un numero razionale, precisamente il numero razionale che resta fuori dai due insiemi che formano la sezione va identificato con la sezione stessa. Solo così si riesce ad avere un insieme di oggetti del pensiero "omogenei", appunto le sezioni di Q, che chiameremo numeri reali. Grazie a tale identificazione possiamo dire che i che i numeri razionali sono un sottoinsieme dei numeri reali. Per quanto detto, l'espressione non è del tutto corretta, ma la si usa, come si fa con altre espressioni, quali "i numeri interi sono un sottoinsieme dei numeri razionali", e così via. Su tali questioni preferirei tornare dopo avere fatto un altro discorso, quello dell'algebra astratta. Seguiamo ancora l'opera di Dedekind: come abbiamo visto, una sezione di Q può contenere tutti i numeri razionali, cioè non lasciar fuori niente; se vogliamo dire così, tra i due insiemi che la formano in mezzo c'è come una specie di buco; è il caso, studiato nel nostro secondo esempio, che "crea" la radice quadrata di 2. Invece, Dedekind dimostra che, se alla stessa maniera di quanto visto in Q, facciamo un taglio sull'insieme dei numeri reali R, in mezzo c'è sempre un numero reale. In altre parole, in R non esistono sezioni di Dedekind che non lascino fuori nessun numero reale, c'è sempre uno ed un solo, ovviamente, numero reale che resta fuori dai due insiemi che formano il taglio. Non è difficile osservare che questa è la stessa idea di continuità che è espressa, in ambito geometrico, dal postulato della continuità della retta. R è dunque un insieme continuo. La proprietà di continuità dell'insieme numerico reale, insieme a quella della retta, permette di creare quella corrispondenza biunivoca tra i punti di una retta e i numeri reali, che è alla base della geometria analitica, la cui nascita precede di secoli, come è noto, l'opera di Dedekind. Questo non ci meraviglia: come abbiamo visto, e come stiamo vedendo, lo sviluppo di diverse teorie matematiche del tutto corrette si è spesso basato su intuizioni e ha preceduto perfino la definizione di concetti fondamentali. A questo punto possiamo dire che i numeri reali sono stati definiti rigorosamente, ma su quali basi? Sulla base dei numeri razionali. Già, ma abbiamo mai definito rigorosamente i numeri razionali? Ecco, vedete che siamo di fronte alla necessità di andare ancora più indietro; in effetti i matematici riescono a definire i numeri razionali sulla base della teoria dei numeri interi, e questi sulla base di quella dei numeri naturali. Proprio i numeri naturali appaiono, sul finire dell'Ottocento, come la base migliore per fondare tutta l'aritmetica, l'algebra, e poi l'analisi matematica. Possiamo dire che l'opera iniziata negli anni Venti del XIX secolo di rendere rigorosi i fondamenti del calcolo infinitesimale si svela alla fine come un'aritmetizzazione delle teorie successive a quella dei numeri naturali e da qui, come vedremo, di tutta la matematica; appare necessaria, a questo punto, un'assiomatizzazione dell'aritmetica. Ne elabora una Dedekind, ma la più famosa, direi la più riuscita, è quella del matematico italiano Giuseppe Peano (1858-1932) e del suo team. Sulla base di tre enti primitivi e cinque postulati Peano è in grado di ricostruire tutta la teoria classica dei numeri naturali. Il passaggio da questa ad una teoria rigorosa dell'insieme dei numeri interi Z, e successivamente alla trattazione di Q, quindi di R avviene grazie soprattutto a due concetti fondamentali, quello di relazione di equivalenza e quello di struttura algebrica. Se l'idea di relazione, come abbiamo visto, era stata resa centrale dall'opera di Leibniz, la teoria delle strutture algebriche, cioè l'algebra delle strutture, la cosiddetta algebra astratta, è dovuta essenzialmente proprio ai matematici dell'Ottocento. Gli studi in tal senso iniziano sostanzialmente da un problema puramente "tecnico", se vogliamo, il problema delle soluzioni dell'equazione generica di grado superiore al quarto. Ho già sinteticamente parlato dell'argomento nel precedente seminario e ora richiamo quanto detto: Ruffini dimostra, tra la fine del Settecento e i primi decenni del secolo successivo, che al di sopra del quarto grado non può esistere una soluzione generale di un'equazione qualunque di quel grado come espressione radico-razionale dei coefficienti, cioè espressione formata dalle quattro operazioni, diciamo così, più estrazioni di radici sui coefficienti. Questo risultato lo riprende il giovanissimo matematico norvegese Abel, che non conosceva l'opera di Ruffini, ma quando queste cose arrivano tra le mani di Evariste Galois, egli coglie il fatto che questo risultato dipende sostanzialmente da certe proprietà dei gruppi di permutazioni, cioè da certe strutture algebriche, i gruppi (è lui che usa la parola gruppo per primo). Il gruppo, in matematica, non è un insieme; noi tante volte, nel linguaggio comune, diciamo "c'è un gruppo di persone" per dire "c'è un insieme di persone", ma in matematica un gruppo è un insieme in cui sia stata definita un'operazione binaria, quindi una legge di composizione interna che associa a due elementi dell'insieme un terzo elemento sempre dello stesso insieme (es. l'addizione, la moltiplicazione nei naturali), che abbia certe proprietà, che sia associativa e per la quale esistano un elemento "neutro" e un "inverso" per ogni elemento dell'insieme (per esempio, nei naturali, né con l'addizione, né con la moltiplicazione si forma un gruppo, perché non c'è l'inverso di ogni elemento; l'inverso di 5 rispetto all'addizione sarebbe -5, ma si va tra gli interi relativi, e l'inverso moltiplicativo di 5 sarebbe 1/5, ma si va tra i razionali). Ebbene, è proprio nelle proprietà di un particolare tipo di gruppo, non un gruppo di numeri, o di coppie ordinate di numeri, ma un gruppo di trasformazioni, meglio gruppo di permutazioni, che Galois coglie l'essenza delle dimostrazioni di Ruffini e di Abel. Senza entrare nei particolari, dal fatto che un certo gruppo di permutazioni abbia o non abbia una determinata proprietà deriva che esista o meno una formula risolutiva generale per le equazioni intere di un certo grado. Si apre così una strada del tutto nuova per lo studio dell'algebra, quella di studiare i gruppi e le altre strutture algebriche, cioè, sempre, insiemi su cui siano state definite una o due operazioni binarie con certe proprietà, quali associatività, commutatività, etc. Da qui inizia la storia dell'algebra che viene chiamata "astratta", non perché i numeri o le equazioni siano realtà particolarmente concrete, ma perché in essa si studiano appunto strutture, indipendentemente se esse siano poste su insiemi di numeri o di funzioni. etc., per cui i risultati che si ottengono hanno una notevole generalità. Ad esempio, se voi pensate alle operazioni sui numeri interi e poi a quelle sui polinomi, potete vedere che sui due insiemi si forma la stessa struttura: cos'è che non hanno gli interi? Non hanno l'inverso moltiplicativo, o, se vogliamo, ce l'hanno, ma non è un intero; ebbene, anche i polinomi sono messi così; mentre un polinomio ha un opposto che è ancora un polinomio, non ha un reciproco che sia un polinomio (x^2+1 è un polinomio, ma $1/(x^2+1)$ non è un polinomio; e sono stato buono, perché ho preso come esempio una funzione, $1/(x^2+1)$, che è definita su tutto R, dato che il denominatore non si annulla mai; potevo far di peggio, scegliere come esempio polinomi con zeri reali, quali x^2-1, la cui funzione reciproca non è nemmeno definita su tutto R). Ora, quando, volendo fare l'esempio più facile, si definiscono i numeri razionali sulla base degli interi e, conseguentemente, si costruisce tutta la teoria algebrica di Q su quella di Z, si scopre che tra la struttura algebrica di Z e quella, che è poi la stessa, di un particolare sottoinsieme di Q esiste una funzione biunivoca che "conserva la struttura", tale cioè che l'immagine di una somma di numeri interi è la somma delle immagini dei singoli addendi, e lo stesso per il prodotto. Una funzione di questo tipo si chiama isomorfismo, stessa forma, stessa struttura. Lavorare con i numeri interi o con i loro corrispondenti in quel sottoinsieme di Q è la stessa cosa. Ebbene un isomorfismo esiste tra le strutture di N e quelle di certi sottoinsiemi di Z, tra la struttura di anello di Z e l'analoga su un certo sottoinsieme di Q, come appena detto, tra quella di campo (la più "ricca" struttura algebrica con due operazioni) di Q e la stessa su un certo sottoinsieme di R, e, se vogliamo, analogamente tra quella, sempre di campo, di R e l'analoga su un sottoinsieme dei numeri complessi. In fondo, tutto ciò che sto dicendo è implicitamente nel lavoro che ognuno di noi faceva alle medie inferiori, quando si parlava di frazioni e si diceva tranquillamente: se una frazione è "apparente" (il numeratore è divisibile per il denominatore, tipo 8/2), allora è un numero intero, 4. Una volta ricostruite tutte le teorie algebriche dei vari insiemi numerici in forma rigorosa, partendo dall'aritmetica peaniana, dobbiamo dire a malincuore che ciò non è vero, perché 8/2 è un numero razionale, che viene definito sulla base dei numeri interi, perciò è un oggetto del pensiero diverso dai numeri interi. Però c'è il famoso isomorfismo, per cui identifichiamo 8/2 con 4 e queste identificazioni ci permettono di dire senza paura di cadere in errore che N è sottoinsieme di Z, questo lo è di Q, etc., facendo ancora una volta combaciare la costruzione rigorosa di certe teorie con lo sviluppo che nei secoli esse hanno avuto, basato su alcune intuizioni, tanto elementari da essere base del nostro apprendimento scolastico, seguite poi da seri ragionamenti. A rigore si dovrebbe dire, ad esempio, che l'anello dei numeri interi $\mathbb{Z}$ è isomorfo ad un sottoanello di $\mathbb{Q}$ (si noti che i simboli per le strutture, cioè gli insiemi con le operazioni su di essi poste, sono diversi dalle semplici maiuscole con cui si indicano gli insiemi); o, in altri termini, l'anello degli interi è un sottoanello del campo dei razionali "a meno di isomorfismi".

Un altro importantissimo filone di ricerca che si sviluppa nel XIX secolo è quello delle geometrie non euclidee. I problemi sulla geometria di Euclide erano nati fin dall'antichità. Dal suo nascere, tra la fine del IV e l'inizio del III secolo a.C., l'opera geometrica di Euclide, "*Elementi*", è stata considerata l'opera fondamentale di matematica, con cui si dovevano confrontare, e di fatto si sono confrontati, tutti i matematici almeno fino alla fine del XIX secolo, come tutti i logici e gli studiosi di branche scientifiche del sapere si sono confrontati, e ancora lo fanno, con l'opera logico-metodologica di Aristotele. Come abbiamo detto nei precedenti incontri, l'opera euclidea è una ricostruzione assiomatica rigorosa della geometria che i Greci avevano sviluppato dai tempi di Pitagora. Alla base del suo lavoro Euclide pone la descrizione di enti, che possiamo chiamare primitivi, perché non definiti attraverso altri concetti già noti, quali punto, retta, etc., alcune "nozioni comuni", cioè verità comunemente accettate, e cinque postulati, base di tutti i risultati successivi. È proprio relativamente ad uno di questi postulati, il quinto, che nascono i problemi cui abbiamo poco fa accennato. Tale postulato non dice affatto, come si sente dire, che per un punto esterno ad una retta *r* passa una sola parallela ad essa; dice invece che "se una retta, venendo a cadere su due rette, forma angoli coniugati interni la cui somma è minore di un angolo piatto, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli coniugati interni la cui somma è minore di un angolo piatto”. Questa è la traduzione dal greco che ho trovato nell’edizione degli “*Elementi*”, della UTET, 1970, a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni. Mi sono permesso esclusivamente di semplificare un po’ la forma, parlando di coniugati interni, anziché “angoli interni e dalla stessa parte” e di angolo piatto, invece che “di due retti”, versione, quest’ultima, tipicamente euclidea, dal momento che il grande matematico alessandrino non pensava ad angoli con i due lati sulla stessa retta, come sono appunto gli angoli piatti. Dal postulato appena esposto si deduce immediatamente che due rette parallele, incontrando una trasversale, formano con essa angoli coniugati interni la cui somma è un angolo piatto. Questo risultato, che, lo ripetiamo, discende dal quinto postulato euclideo, è la 29° proposizione (cioè teorema) del primo libro degli *Elementi*, mentre il risultato che si ottiene scambiando l’ipotesi con la tesi (se la somma degli angoli coniugati interni è uguale ad un angolo piatto, allora le due rette sono parallele) è nella 28° e per essa non c’è bisogno del quinto postulato, come non c’è bisogno di esso per tutte le proposizioni del primo libro, fino, appunto, alla 28°. Fin qui nessun problema, se non fosse per il fatto che Euclide, scrivendo i suoi Elementi, non usa, per le prime ventotto proposizioni, il quinto postulato a costo di ricorrere a dimostrazioni ben più laboriose di quelle che avrebbe potuto fare con l’uso di esso, ed inoltre introduce, stranamente, risultati corretti, ma inutili alla luce di quelli che avrebbe poi ottenuto come conseguenze del quinto postulato; ad esempio, oggi appare inutile la 17° proposizione, che afferma che la somma di due angoli interni di un triangolo è minore di un angolo piatto, visto che la 32° proposizione afferma il ben noto risultato che la somma dei tre angoli interni di un triangolo è un angolo piatto. C’è però una profonda differenza: la 17° proposizione è vera anche in una geometria fondata solo sui primi quattro postulati, la 32° no; essa è dimostrabile solo utilizzando il quinto postulato. Perché, dunque, il razionale e organizzato Euclide, che elabora una teoria perfettamente coordinata, evitando risultati inutili e utilizzando la via rigorosa più breve per giungere al risultato, si comporta così? Non crede nella verità del quinto postulato? O pensa, almeno per un po’, che sia inutile? O forse spera di poterlo dimostrare, togliendolo quindi dal gruppo dei postulati e presentandolo come un teorema? Queste domande affascinano i matematici, e non solo loro, ma anche studiosi di altre discipline, e ciò fino addirittura ai primi decenni del XIX secolo, cosicché molti si mettono a cercare una risposta; in genere, essendo essi convinti della verità del quinto postulato, cercano di giungere ad una contraddizione con ragionamenti che partano dai primi quattro postulati, con le loro conseguenze, e dalla negazione del quinto; svolgono, insomma, un ragionamento per assurdo. Così facendo, se raggiungessero una contraddizione, dimostrerebbero che non si può formare una geometria sui primi quattro postulati e la negazione del quinto, per cui quest’ultimo è essenziale, anche se, chiaramente, non trova più posto tra i postulati, ma diventa un teorema. La domanda più interessante, però, sorge verso la fine della cultura antica; la pone, infatti, Proclo, filosofo neoplatonico del V secolo d.C., il più grande commentatore di Euclide nell’antichità. Egli si pone la seguente domanda: io sono certo che, se due rette sono abbastanza inclinate, ovvero se una è abbastanza inclinata rispetto all'altra, queste due rette si incontrano, ma non sono sicuro che non possa succedere che, fissata una retta r e inclinando una parallela ad essa di poco, di tanto poco, in maniera cioè che, tagliando le due rette con una trasversale, la somma dei coniugati interni abbia una piccolissima “deficienza” rispetto ai 180 gradi, ebbene non sono sicuro che si incontrino, perché chi dice che non possano andare avanti senza incontrarsi mai? Nel mondo empirico non si possono avere prove per asserire che tali rette si incontreranno, come sostiene il quinto postulato, né che non si incontreranno mai, come Proclo sospetta possa accadere.

Anche partendo dalla domanda di Proclo, dunque, è importante stabilire con certezza se si può fare a meno del quinto postulato, anzi, stabilire che non si può fare a meno di esso, perché, come ho detto, fino agli inizi dell’Ottocento è fortissima la convinzione che tale postulato sia fondamentale per la geometria. Gli studi di cui stiamo parlando si sviluppano in particolare nel Settecento e a tal riguardo non posso non ricordare l'opera del gesuita Padre Gerolamo Saccheri, che esce nel 1733, "*Euclides ab omni naevo vindicatus*" ("Euclide liberato da ogni neo") e, verso la fine del secolo, gli studi di Adrien Marie Legendre. Insisto sul fatto che proprio in questo secolo si sviluppano gli studi per far vedere che la geometria deve essere proprio quella euclidea, cioè che il quinto postulato non è eliminabile, e tantomeno sostituibile con uno ad esso contraddittorio, perché l'altra volta i filosofi ci hanno detto di come la filosofia dei secoli XVII e XVIII si concentra molto su come noi possiamo conoscere la realtà, interrogandosi quindi sulle basi e i metodi della nostra conoscenza del mondo, di noi, di Dio. Ebbene, la scienza moderna della natura, che, nata con l'opera di Galileo, sta facendo passi da gigante, ha anch'essa bisogno di basi certe; e queste basi sono matematiche, in particolare geometriche; non possiamo dimenticare che l'unica teoria matematica assiomatizzata nell'antichità è proprio la geometria, anzi, che è stato Euclide colui che ha compiuto, negli *Elementi*, l'assiomatizzazione, tanto è vero che gli scienziati del Seicento si preoccupano di confrontare i loro metodi e risultati con quanto dice Euclide e Newton riporta i suoi studi di calcolo infinitesimale in forma geometrica, con un linguaggio geometrico. Allora bisogna, come dice Saccheri, liberare Euclide da ogni neo, ed il neo è il quinto postulato. Quando la cosa arriva sul tavolo di Gauss e poi di Lobacevskij, grande matematico russo della prima metà dell'Ottocento,[5] questi si accorgono, con intense ricerche, che, se si nega il quinto postulato, non si arriva per questo necessariamente ad una contraddizione con quella parte di geometria che dipende solo dai primi quattro postulati. Allora, effettivamente, vengono a nascere delle geometrie nuove: nasce, in particolare, quella che noi chiamiamo la geometria di Lobacevskij. Egli pone, in sostanza, come quinto postulato proprio "il sospetto" di Proclo, cioè che, dato un punto P fuori di una retta

[5] parlerò solo dell'opera di questi due grandi matematici, ma per completezza non posso non citare Janos Bolyai

r, esista un angolo di vertice P per il quale le rette interne a tale angolo e al suo opposto al vertice non incontrano *r*, mentre le rette al di fuori di esso la incontrano. E siccome chiama parallele le due rette lati di tale angolo, che, si può dimostrare, non incontrano la retta data, può dire che per un punto fuori da una retta passano non una, ma due rette parallele ad essa. In realtà il problema non sembra così grave. Già Aristotele aveva osservato che, se intendessimo con il termine "retta" una curva diversa, nascerebbe un'altra geometria, che però non ci interessa, perché l'uomo cerca la verità, in tale ricerca è la sua felicità, perciò non deve andare dietro a pure fantasie: visto che la geometria euclidea[6] corrisponde così bene al mondo empirico, è essa la vera geometria, il resto è tentazione del pensiero umano, che devia dalla verità. È in fondo la stessa posizione culturale dei matematici dell'Ottocento, la cui domanda principale è: ma il mondo empirico è euclideo o no? Lobacevskij, che è sostanzialmente un empirista, che ritiene che anche le teorie geometriche devono essere verificate nel mondo empirico, va a fare le sue misurazioni: "usa" un triangolo astronomico, con vertici il Sole, la Terra e la stella Sirio e vede che la somma degli angoli interni del triangolo non è proprio 180 gradi - solo in geometria euclidea la somma degli angoli interni di un triangolo è di 180 gradi - ma gli si avvicina talmente tanto che, innanzitutto, lo scarto può dipendere dai soliti errori di misura, in secondo luogo, in fondo - dice Lobacevskij - anche se la somma non fosse proprio 180 gradi, possiamo considerare ancora che il mondo fisico è euclideo. Gauss giunge alle stesse conclusioni con un altro triangolo, usando le vette di tre colli della Germania. E gli altri matematici cosa pensano? In generale non prendono granché in considerazione il problema. Ma sì, pensano, queste sono belle teorie, che però non interessano più di tanto la scienza. Quando però le prendono in considerazione, si accorgono che il problema è veramente grosso. Perché, quando le prendono in considerazione, scoprono che se non è contraddittoria la geometria euclidea, se, cioè, i cinque postulati di Euclide non conducono ad affermare e negare

[6] Aristotele è precedente ad Euclide, ma, come abbiamo visto, la geometria euclidea è una geniale rielaborazione della geometria elaborata dai Greci nei tre secoli, circa, precedenti, che Aristotele conosceva, almeno in buona parte.

uno stesso risultato, non sono contraddittorie nemmeno le geometrie non euclidee, e viceversa. Allora, come dice Carruccio, la scoperta delle geometrie non euclidee è la scoperta di nuovi mondi, di “nuovi mondi possibili”, riprendendo un’espressione di Leibniz, perché un mondo con una geometria diversa è un altro mondo possibile. Innanzitutto a questo punto è chiaro che la verità di una teoria matematica non è la sua applicabilità, non è la sua corrispondenza con la struttura del mondo empirico, la verità di una teoria matematica è la sua non contraddittorietà. Ma è evidente che tutto questo comporta anche l’esplosione di un altro grande problema, quello dei fondamenti della matematica. Se prima il fondamento di tutto era la geometria euclidea, basata sull'intuizione visiva, ora, con la comparsa di diverse geometrie, tanto “vere” quanto quella tradizionale, i matematici devono ritrovare qualcosa di assolutamente certo, su cui fondare la loro scienza. Del resto, come abbiamo visto, è in atto un’opera considerevole, da parte di grandi studiosi, per dare basi rigorose al calcolo infinitesimale. Il problema dei fondamenti si intreccia con la nascita, sempre nell’Ottocento, di un’altra grande branca della matematica, la grandissima teoria degli insiemi, dovuta essenzialmente a Georg Cantor, degli insiemi infiniti, vorrei sottolineare. Si, perché Cantor elabora una teoria nuova, ponendo l'insieme come oggetto; infatti parole come insieme o aggregato o classe erano usate anche prima (chi è che non diceva la classe dei numeri naturali, o cose di questo genere?). Cantor, invece, elabora una teoria sugli insiemi, ma per fare ciò ha bisogno di considerare anche, direi soprattutto, degli insiemi infiniti, infiniti in atto. Fino a quel momento la matematica, o almeno una buona parte di essa, aveva, se non rifiutato l'infinito in atto, fatto a meno di esso, lavorando solo con l'infinito potenziale. Cantor accetta l'infinito in atto, studia insiemi infiniti in atto, elabora su di essi una teoria matematica che desta ammirazione ancora oggi. Non possiamo nasconderci che, tra la fine dell’Ottocento e l’inizio del Novecento, la teoria degli insiemi ha avuto molti avversari tra i grandi matematici del momento, ma è anche vero che ha affascinato personaggi geniali come David Hilbert (1862-1943), che di fronte alle difficoltà connesse alla nuova teoria esclama “nessuno ci scaccerà dal paradiso che Cantor ha creato per noi!”. La visione filosofica di Cantor si colloca nel filone platonico-agostiniano, un filone aperto alla possibilità della mente umana di concepire insiemi infiniti in atto, una possibilità che affascina Cantor, che si convince che le sue ricerche siano un contributo benefico per la filosofia e la teologia stessa. Per questo scrive, su questi temi, a vescovi, cardinali e addirittura al papa Leone XIII, ottenendo attenzione e disponibilità al dialogo, anche perché lo stesso Papa, nell’enciclica “Aeterni Patris”, aveva invitato gli uomini di cultura cattolici a confrontarsi con le nuove frontiere della scienza. La teoria degli insiemi, unita alla logica,[7] appare ad alcuni come la base per poter introdurre i numeri naturali e quindi fondare l’aritmetica e tutta la matematica. Fondamentale, a questo proposito, è l’opera di Gottlob Frege (1848-1925), che collega i numeri ai concetti, intesi in senso aristotelico. Purtroppo, però, il sorgere delle antinomie, che sono contraddizioni, nella stessa teoria degli insiemi mostra che, per porre su basi certe tutta la matematica, la teoria in questione ha bisogno di essere “purificata”. Si sviluppano, al riguardo, molti studi tra gli ultimi anni dell’Ottocento e i primi decenni del secolo successivo. Io mi limito solo a riferire appena appena dell’assiomatizzazione della teoria degli insiemi e a svolgere qualche ultima considerazione.

Uno dei matematici che più ha contribuito a liberare la teoria degli insiemi dalle antinomie è stato Ernst Zermelo (1871-1953), e lo ha fatto assiomatizzandola, precisamente introducendo degli assiomi che fossero regole per “costruire” nuovi insiemi; infatti, uno dei problemi più grossi, forse il più grosso, era il dominio della teoria, in altre parole se si poteva elaborare una teoria che riguardasse tutti gli insiemi pensabili. In realtà si era già visto che accettando qualunque insieme ci balenasse in mente, magari all’apparenza innocuo, come l’insieme di tutti gli

[7] non è qui possibile raccontare in maniera sufficientemente rigorosa lo sviluppo che, durante l’Ottocento, ha la logica. Ricordo solo che è in questo secolo che inizia a concretizzarsi, soprattutto con l’opera di George Boole (1815-1864) il “sogno” di Leibniz di un “calcolo del pensiero umano”, cioè di un calcolo, su un adeguato simbolismo, capace di esprimere le connessioni tra concetti della mente, in modo da giungere a dimostrare proposizioni, giudicare del vero e del falso, trovare nuovi risultati (ars demonstrandi, ars iudicandi, ars inveniendi, secondo il linguaggio di Leibniz)

insiemi, poteva nascere una contraddizione; da qui la necessità di partire da un universo, sufficientemente ampio, di insiemi per così dire sicuri e, sulla base di essi, fornire regole rigorose per introdurne altri. Non era una cosa nuova. Molto spesso nella scienza si è dovuto limitare il campo per poter elaborare una teoria veramente scientifica; è noto, a tal riguardo, che lo stesso Euclide, per elaborare la sua teoria delle proporzioni, ha dovuto limitare il campo delle grandezze da trattare; per la precisione ha fatto riferimento a quelle classi di grandezze omogenee per cui valga il postulato di Eudosso-Archimede. Oggi la cosa può apparire ovvia, ma non lo era affatto a quei tempi. È interessante osservare che, come i postulati euclidei, anche gli assiomi di Zermelo sono dunque essenzialmente costruttivi: come il terzo postulato di Euclide dice che si può sempre "costruire" un cerchio, così l'assioma V di Zermelo ci garantisce come "costruire" l'unione di due insiemi. L'opera di Zermelo, perfezionata da altri grandi matematici, come Fraenkel e Skolem, ha fornito alla teoria degli insiemi una base assiomatica che, almeno fino ad ora, ha permesso di evitare il sorgere di contraddizioni, ma siamo sicuri che non ne sorgeranno più? Non si è trovata una certezza sulla non contraddittorietà di una teoria assiomatica come quella degli insiemi. Il mio sospetto, al riguardo, è che avesse ragione Platone, che, pur innamorato della matematica, nella "*Repubblica*" conclude che essa non può giustificarsi sui soli suoi postulati, che c'è bisogno di appoggiarsi a certezze più evidenti e sicure, quelle della filosofia, il più alto grado della conoscenza umana. E forse ha ragione il grande matematico André Weil (1906-1998), quando afferma "Dio esiste, perché la matematica è vera; ma esiste anche il diavolo, perché non riusciamo a dimostrarlo".

È ovvio, poi, che il problema dei fondamenti della matematica si intreccia con quello di capire cosa sono gli enti matematici. Ci sono pensatori che ritengono che la matematica sia puramente una "grammatica", con le sue regole, fatta su puri simboli; altri, invece, vedono nei concetti matematici degli oggetti del pensiero e possiamo dire che la maggioranza dei matematici è di questa idea; non è affatto naturale, per una persona che studia teorie scientifiche, pensare che quello che sta studiando è un puro gioco di simboli, che non ha una sua realtà. Un grande fisico del Novecento, non ricordo chi, diceva "se un fisico, quando fa fisica, pensasse che è solo un bel gioco, come alcuni vorrebbero sostenere, smetterebbe di fare fisica". Ma gli enti matematici sono oggetti del pensiero creati dalla nostra mente o scoperti da essa? Su questo riferisco il pensiero di un grande matematico dell'Ottocento, Charles Hermite, con cui concordo perfettamente: "come i fisici non inventano loro le leggi del mondo empirico, ma le scoprono, così i matematici non inventano, ma scoprono le leggi del loro mondo, che è un mondo di enti intellegibili".

BIBLIOGRAFIA

1) Bottazzini Umberto, *Il flauto di Hilbert,* Utet, Torino
2) Boyer Carl, *Storia della matematica,* Mondadori, Milano
3) Carruccio Ettore, *Appunti di Storia delle matematiche, della logica e della metamatematica,* Pitagora editrice, Bologna
4) Carruccio Ettore, *Matematica e logica nella storia e nel pensiaro contemporaneo,* Gheroni, Torino
5) Frajese Attilio, *La matematica nel mondo antico,* Studium, Roma.

Si consiglia anche la lettura dei seguenti testi:

- Bottazzini Umberto "*Infinito*", ed. Il Mulino,
- Bottazzini Umberto "*Istanti fatali*", ed. Laterza

entrambi usciti dopo il seminario.