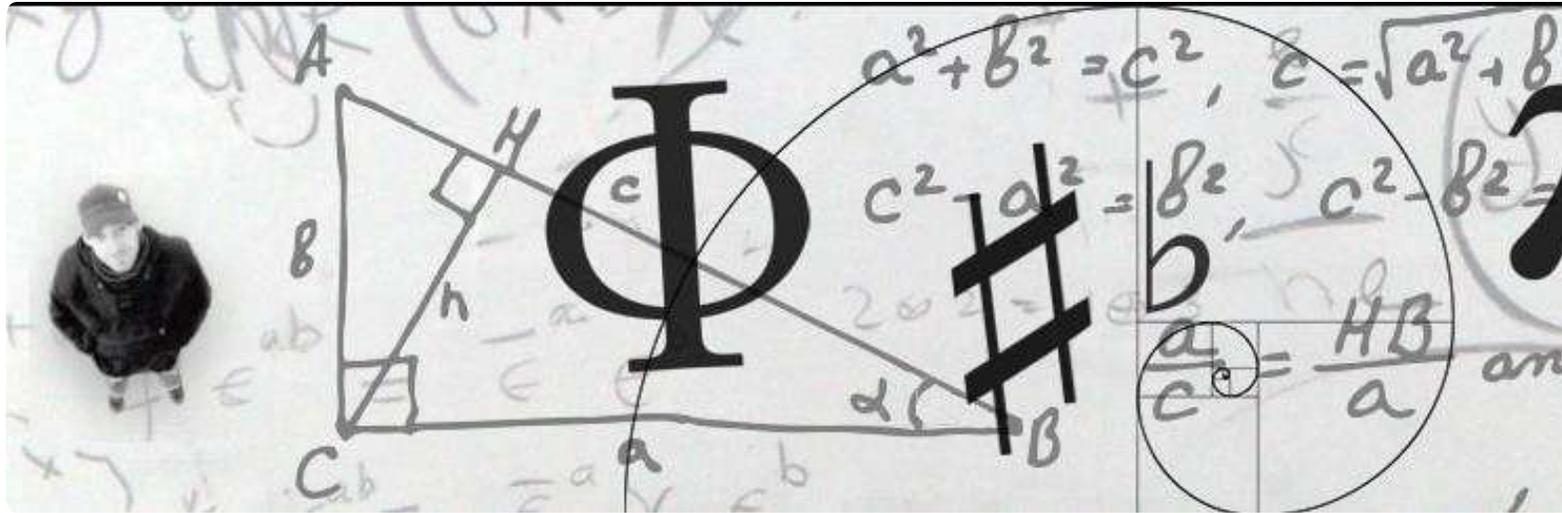


Abbandonando Pitagora: Temperamento equabile e Sistema tonale

Martino Tosi

Università Cattolica del Sacro Cuore



parte prima

Fondazione matematica della musica (e dell'arte)

Pitagora nella bottega del fabbro

Rapporti numerici tra altezze dei suoni

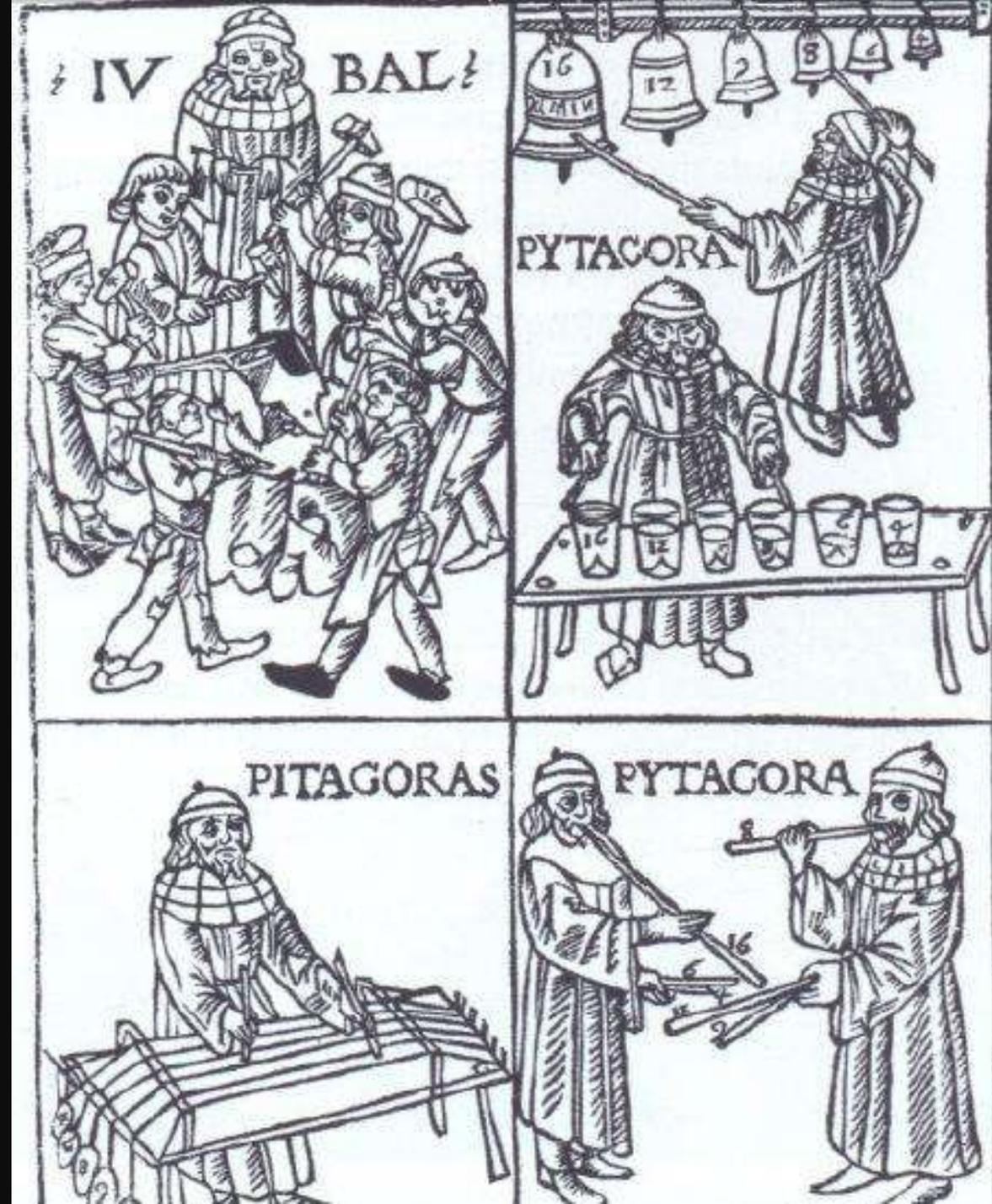
Consonanza-Numero

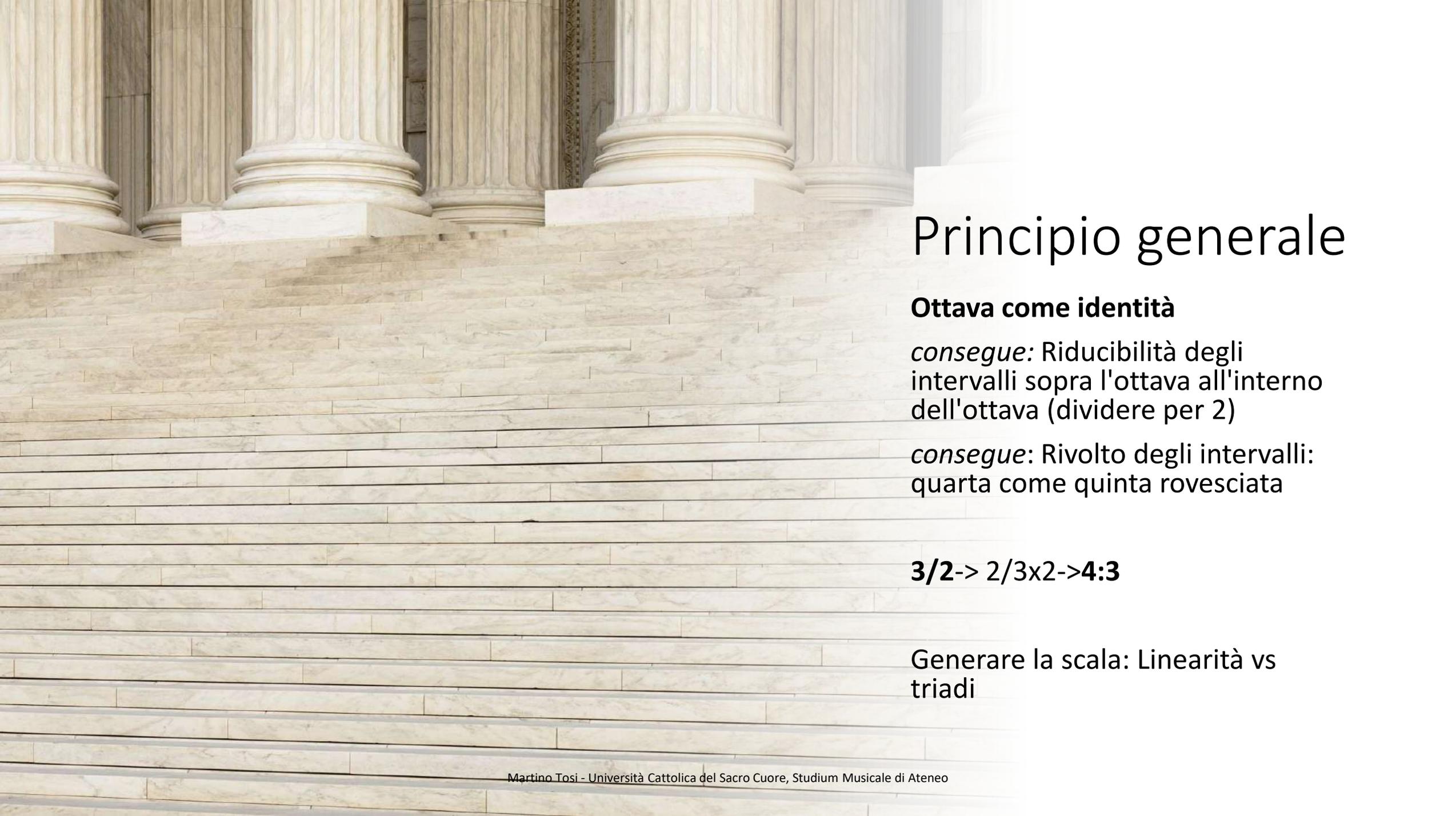
2:1=ottava

3:2=quinta

4:3=quarta

5:4=terza





Principio generale

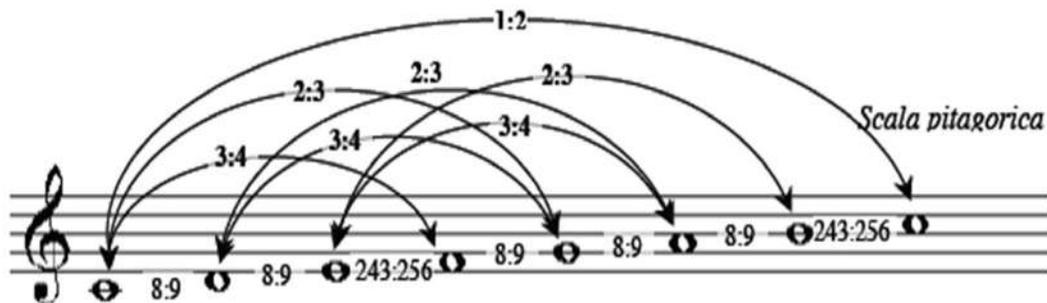
Ottava come identità

conseguenza: Riducibilità degli intervalli sopra l'ottava all'interno dell'ottava (dividere per 2)

conseguenza: Rivotto degli intervalli: quarta come quinta rovesciata

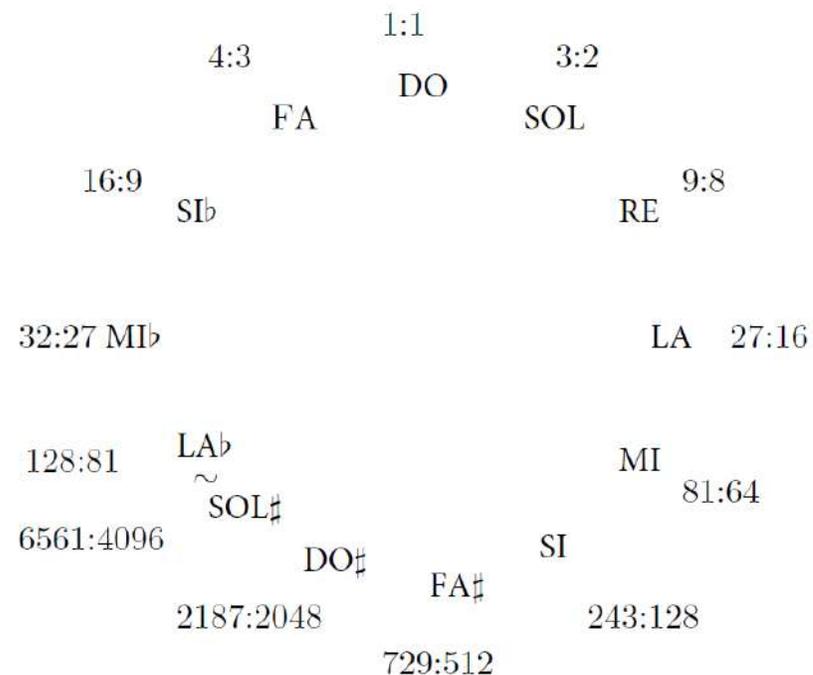
$3/2 \rightarrow 2/3 \times 2 \rightarrow 4:3$

Generare la scala: Linearità vs triadi



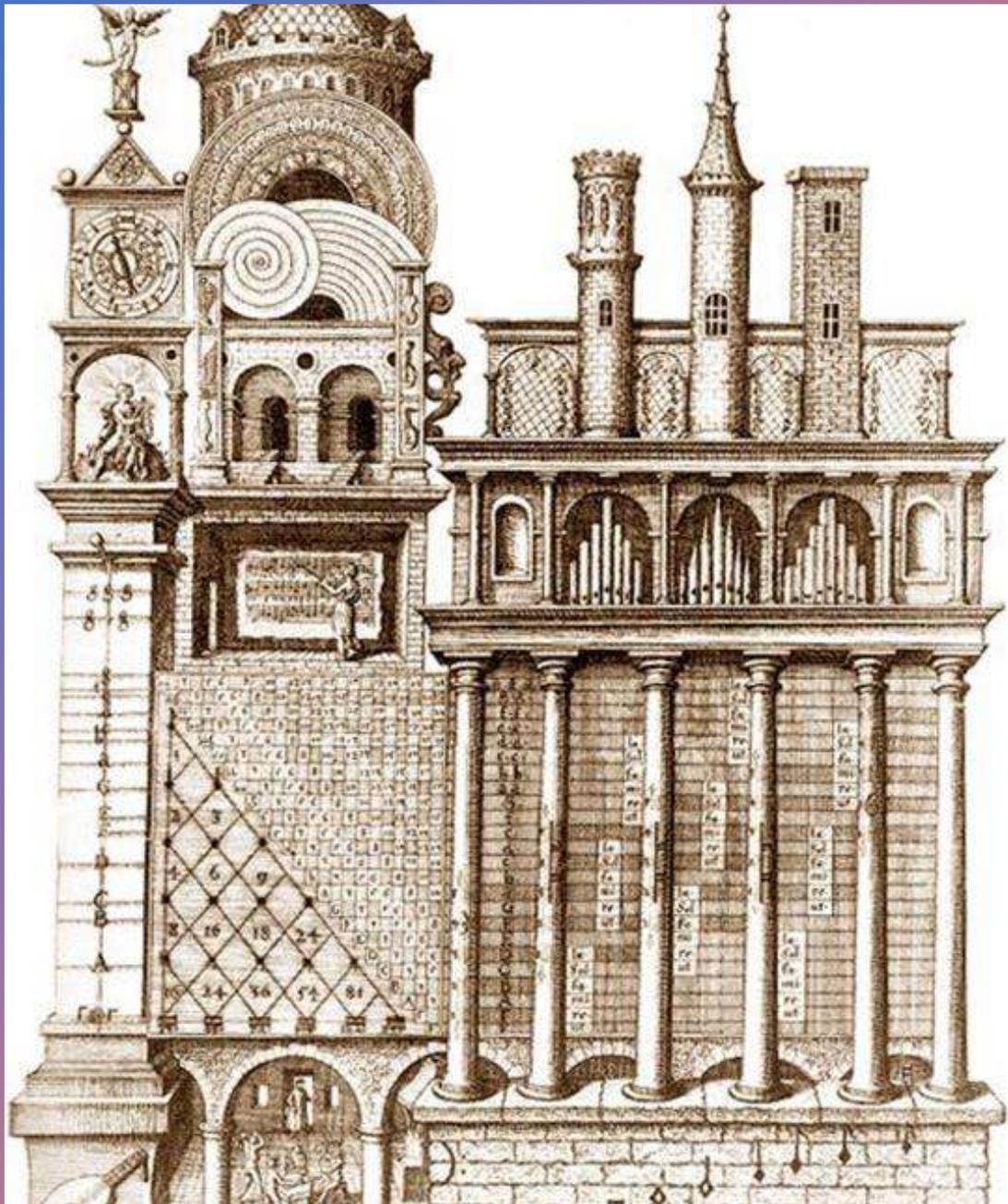
Creazione per quinte $(3/2)^n$
+ ottava

Circolo delle
Quinte e
generazione
della scala



note	do	re	mi	fa	so	la	ti	do
ratio	1:1	9:8	81:64	4:3	3:2	27:16	243:128	2:1

[tastiera](#)



Matematica, Arte e Bellezza

"le matematiche parlano del bene e del bello e li fanno conoscere in sommo grado; infatti se è vero che non li nominano direttamente, ne fanno conoscere tuttavia gli effetti e le ragioni. (...)

Le supreme forme del bello sono:
l'ordine, la simmetria e il delimitato e le matematiche le fanno conoscere più delle altre scienze"

Aristotele, Metafisica

RE $\flat\flat$
 DO LA \flat
 FA SOL
 MI \sharp SI \sharp FA \times MI $\flat\flat$
 SI \flat LA \sharp RE
 DO \times
 MI \flat RE \sharp SOL \times LA SI $\flat\flat$
 DO \times MI
 LA \flat SOL \sharp FA \flat
 DO \sharp SI
 RE \flat FA \sharp DO \flat
 SOL \flat

Far concordare le prime due consonanze?

Quinta e ottava: Comma pitagorico

"Le ottave si fondano dalla proporzione 2:1, mentre le quinte si fondano su multipli di tre (stanno tra loro in rapporto 3:2. Sia due sia tre sono numeri primi, divisibili cioè solo per sé stessi e per il numero uno. E numeri primi diversi non possono mai avere un multiplo in comune, non importa quante volte li si moltiplichino."



note	C	D	E	F	G	A	B	C
ratio	1:1	9:8	81:64	4:3	3:2	27:16	243:128	2:1
cents	0.000	203.910	407.820	498.045	701.955	905.865	1109.775	1200.000

Scala
pitagorica (logaritmica)

TERZE CRESCENTI!

$81/64:5/4 = 407.820:386.314$

"Stonate"=battimenti

Modi gregoriani

[tastiera](#)

I	autentico (dorico)	RE MI FA SOL la si do re
II	plagale (ipodorico)	LA SI DO RE MI FA SOL la
III	autentico (frigio)	MI FA SOL la si do re mi
IV	plagale (ipofrigio)	SI DO RE MI FA SOL la si
V	autentico (lidio)	FA SOL la si do re mi fa
☆ VI	plagale (ipolidio)	DO RE MI FA SOL la si do
VII	autentico (misolidio)	SOL la si do re mi fa sol
VIII	plagale (ipomisolidio)	RE MI FA SOL la si do re

(La nota in neretto corrisponde alla *finalis*; la nota racchiusa nel quadrato indica la *repercussio*).

Implicazioni pratiche

Intervalli armonici e melodici

Evitare intervalli armonici di terza



Graduel a' Alienor de Bretagne
Orbis Factor (1250)



Musica popolare
medievale

Fontevraud Gradual

Orbis factor, rex e-terne, e-le- i-son. Ky-ri- e
e-le- i-son. 2. Pi- e- ta-tis fons immense, e-le- i-
son. Ky-ri- e e-le- i-son. 3. Nox-as omnes nos-
tras pel-le, e-le- i-son. Ky-ri- e e-le- i-son.
4. Ipse qui lux est mundi, da-tor ui-te, e-le- i-son. Chri-
ste e-le- i-son. 5. Arte le-sos demones intu-

La pratica
interroga la
teoria



Walter Odigton (Inghilterra)
John Dunstable (1390-1453) e l'intervallo di terza

Contra

Tenor

10 15

20 25

Ve - ni, Sanc - te Spi - ri - tus, Et e - mit - te coe -

li - tus Lu - cis tu - e ra - di - um,

- ti - me, Dul - cis ho -

Sanc - ti Spi - ri -

Ve - ni pa - ter pau - perum, Ve - ni da - tor mu - ne - rum, Ve - ni lu - men cor -

spes a - ni - mæ, Dul - ce refri - ge - ri - um. In la -

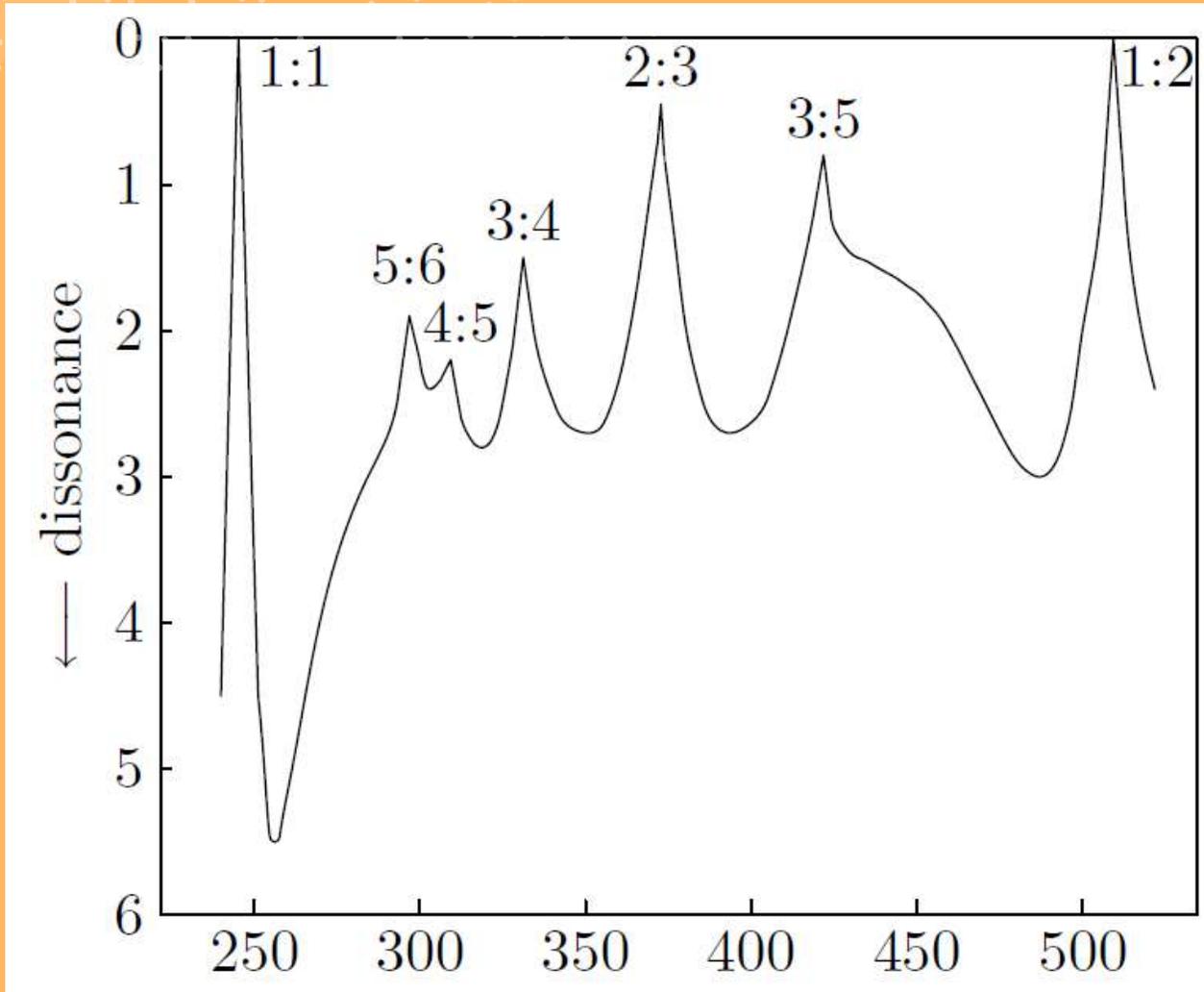
- tus no - bis as - sit gra -

Martino Tosi - Università Cattolica del Sacro Cuore, Studium
Musicale di Ateneo

Consonanze e dissonanze

Schema consonanza-dissonanza nello spazio continuo

Vicini nell'intervallo di ottava



Temperamento mesotonico



A



B

Accordato per evitare i
battimenti di terza
ma... "quinta del lupo"



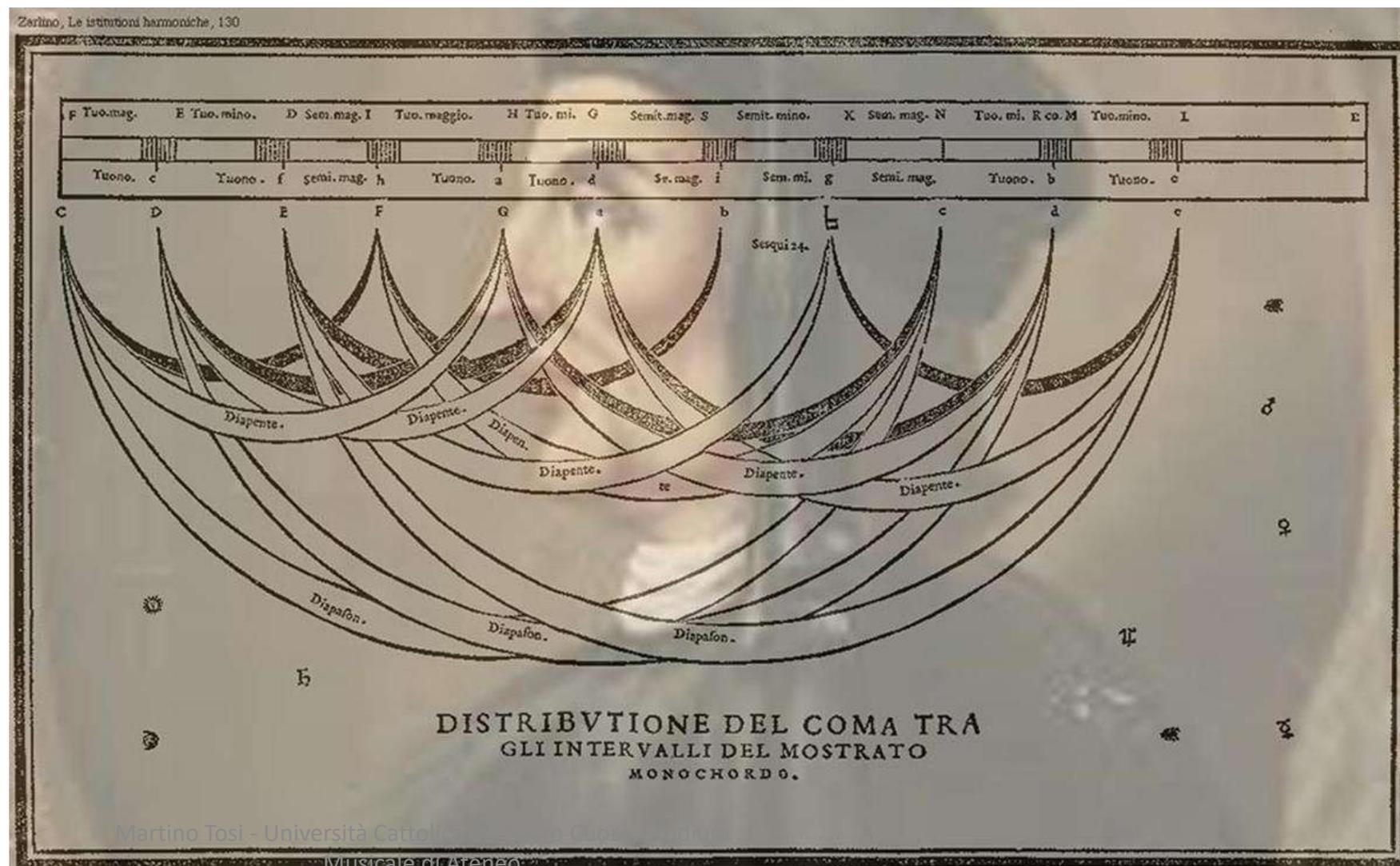
Una soluzione possibile (?)

Scala naturale

note	do	re	mi	fa	sol	la	si	do
ratio	1:1	9:8	5:4	4:3	3:2	5:3	15:8	2:1
cents	0.000	203.910	386.314	498.045	701.955	884.359	1088.269	1200.000

I problemi dell'accordatura:
 -all'interno della stessa scala
 -nel passaggio a due scale differenti

Gioseffo Zarlino
 (1517-1590)

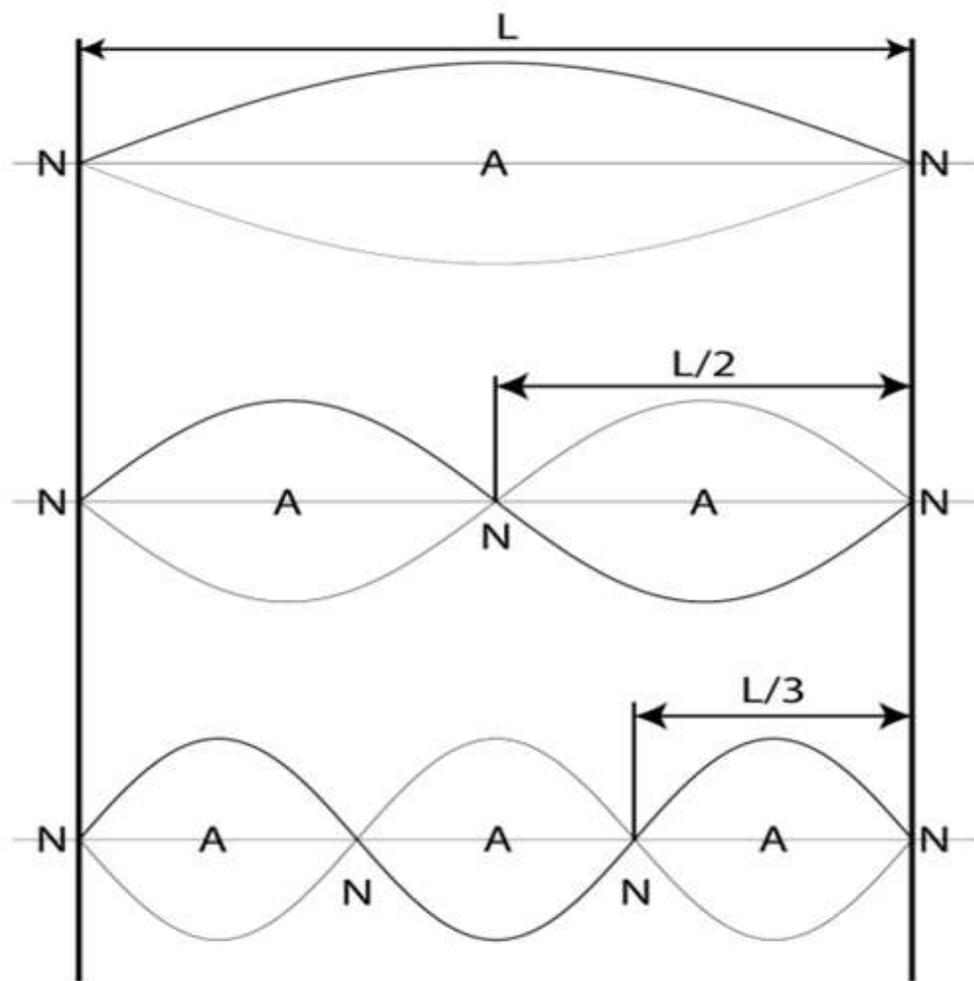




parte seconda

Fondazione fisicalistica della musica

J. P. Rameau,
Traité de l'harmonie réduite à ses principes naturels (1722)



Gli armonici naturali: il fondamento fisico della consonanza

—
ogni corda vibra secondo vari rapporti tra numeri interi della frequenza (ad es. oltre che $3/2$, relazione pitagorica, anche $5/4$, la terza etc):

serie armonica matematica divergente: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ etc.

Il suono come accordo

Suono generatore

Armonia > Melodia

The diagram illustrates the relationship between a sound generator and its harmonics. It features a musical staff with a treble clef and a bass clef, with notes colored in purple, red, green, blue, and black. Brackets above and below the staff indicate various intervals and their corresponding cent values. The intervals shown are:

- 1 ottava (purple)
- settima min. -31c (blue)
- quinta +2c (green)
- terza mag. -14c (red)
- 1 ottava (purple)
- settima min. -31c (blue)
- quinta +2c (green)
- terza mag. -14c (red)
- seconda mag. +4c (black)
- tritono -49c (black)
- sesta min. +41c (black)
- settima mag. -12c (black)

Below the staff, the harmonics are listed as a sequence of numbers from 1 to 16, with brackets indicating the octave range for each:

- 1 (purple)
- 2 (purple)
- 3 (green)
- 4 (purple)
- 5 (red)
- 6 (green)
- 7 (blue)
- 8 (purple)
- 9 (black)
- 10 (red)
- 11 (black)
- 12 (green)
- 13 (black)
- 14 (blue)
- 15 (black)
- 16 (black)

The intervals between these harmonics are also indicated by brackets:

- 1 ottava (purple)
- 2 ottave (purple)
- 3 ottave (purple)
- 4 ottave (purple)

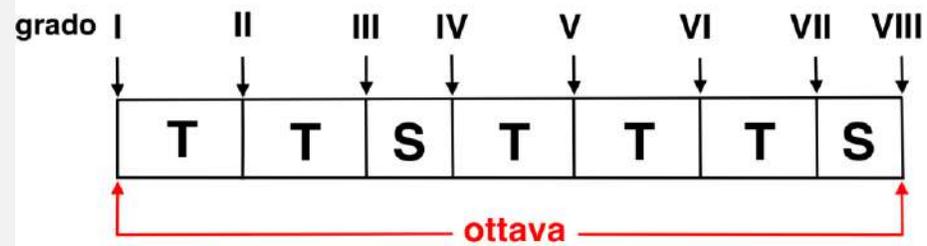
[tastiera](#)

Nota fondamentale e relazioni

IV->I<-V

Triade di: tonica, dominante, sottodominante

Scala maggiore generata dalle tre triadi fondamentali



TREATISE of MUSIC,

CONTAINING THE

PRINCIPLES

OF

COMPOSITION.

WHEREIN

The several Parts thereof are fully explained, and made useful both to the Professors and Students of that Science.

By Mr. RAMEAU,

Principal Composer to his Most Christian Majesty, and to the Opera at Paris.

Translated into English from the Original in the French Language.

SECOND EDITION.

DUBLIN,

PRINTED FOR LEWIS WATTS.

MDCCLXXII.

Dialettica tensione-rilassamento: la cadenza

Perfetta

The musical score is written for piano in 4/4 time. It consists of two staves: a treble clef staff and a bass clef staff. The treble staff contains three chords: a D major triad (D4, F#4, A4) in the first measure, an E major triad (E4, G#4, B4) in the second measure, and a C major triad (C4, E4, G4) in the third measure. The bass staff contains three notes: D3 in the first measure, E3 in the second measure, and C3 in the third measure. Roman numerals IV, V, and I are placed below the bass staff, corresponding to the chords above. A bracket is drawn under the IV and V chords, indicating a phrase of tension. The word 'Perfetta' is written above the treble staff.



M. Clementi,
sonatina op.
36 n. 1
(1797)

Sonatina in C Major

Op. 36, No. 1

Muzio CLEMENTI
1752-1832
ed. M.A. Caux

Allegro

The image shows the first two systems of a piano sonatina. The first system begins with a forte (f) dynamic and the second system begins with a piano (p) dynamic. The music is written for piano and consists of two systems of four measures each. The first system starts with a forte (f) dynamic, and the second system starts with a piano (p) dynamic. The tempo is marked 'Allegro'. The score is in C major and 2/4 time. The right hand plays a simple, elegant melody, and the left hand provides a supporting bass line. The first system ends with a fermata over the final note, and the second system begins with a piano (p) dynamic. The score is published by M.A. Caux.

Source : *Six Progressive Sonatinas for the Piano Forte*, Op. 36 (1797)

Copyright © 2013 by Caux Music Publishing
www.sheetmusic2print.com

"Nobile semplicità e quieta grandezza"

Poter suonare in tutte le tonalità

Per sfruttare tutta la potenzialità del sistema tonale

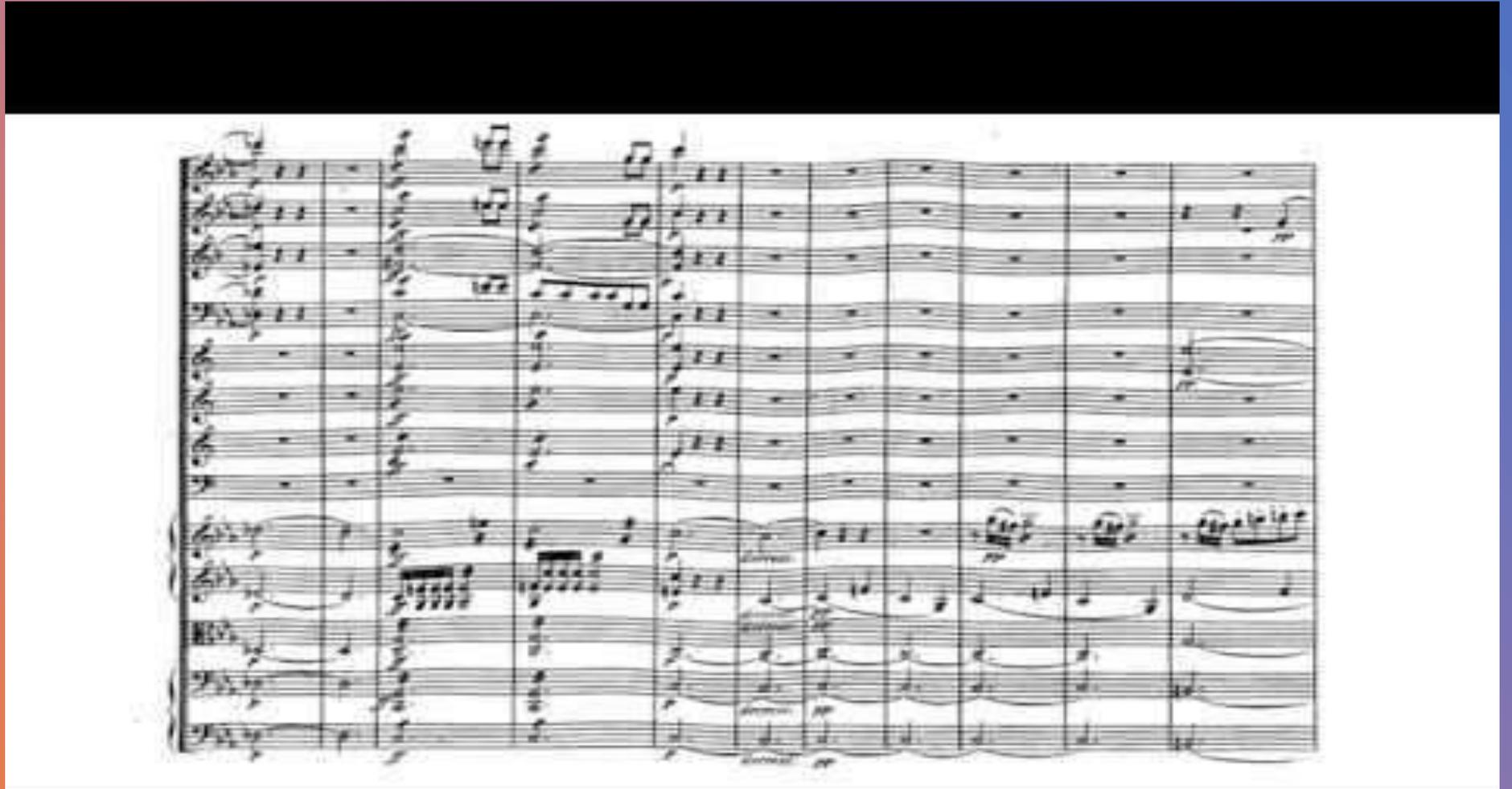
L'Eroica di
Beethoven (1803)

The image shows a musical score for the first movement of Beethoven's Eroica Symphony, measures 3-45. The score is written for three staves. The top staff is marked '3-45' and 'crescendo'. The middle staff is marked '8va bassa'. The bottom staff is marked 'crescendo'. The music is in 3/4 time and features a complex melodic line with many accidentals and dynamic markings.

Poter suonare in tutte le tonalità

L'Eroica di
Beethoven

6.05

A page of handwritten musical notation for Beethoven's 'Eroica' symphony. The page features multiple staves of music, including a grand staff at the bottom. The notation is dense and complex, with various rhythmic values, accidentals, and dynamic markings such as 'pp' (pianissimo) and 'ppp' (pianississimo). The paper shows signs of age and wear, with some ink bleed-through from the reverse side.

Temperamento equabile

«Temperare le inviolabili formule, ovvero farle coesistere»

«Unire nelle giuste proporzioni»

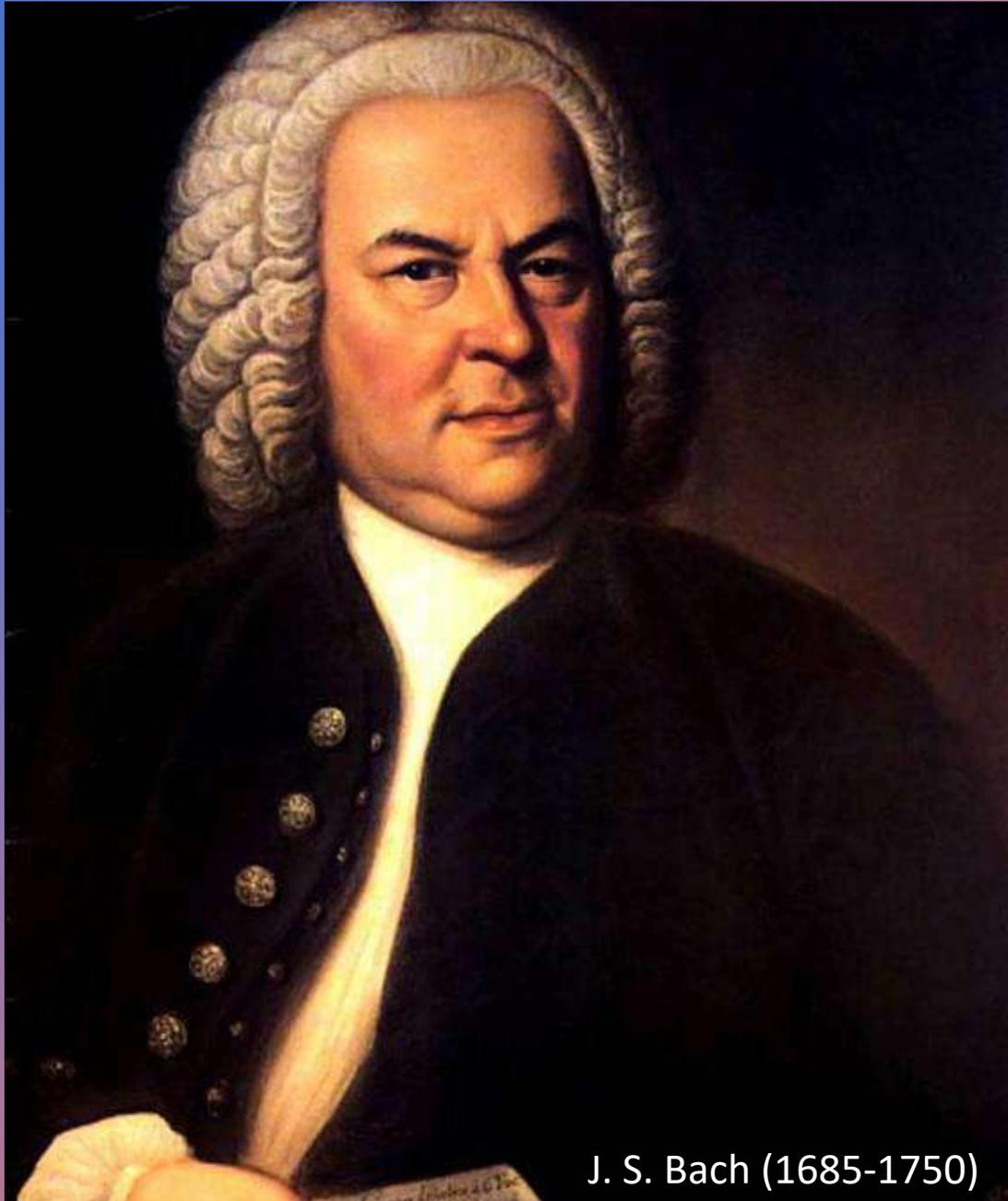
note	do	re	mi	fa	so	la	ti	do
ratio	1:1	$2^{\frac{1}{6}}:1$	$2^{\frac{1}{3}}:1$	$2^{\frac{5}{12}}:1$	$2^{\frac{7}{12}}:1$	$2^{\frac{3}{4}}:1$	$2^{\frac{11}{12}}:1$	2:1
cents	0.000	200.000	400.000	500.000	700.000	900.000	1100.000	1200.000

Leibniz e il temperamento equabile

«Avendo un giorno considerato ed esaminato per mezzo dei Logaritmi l'antica **suddivisione dell'ottava in 12 parti uguali**, che Aristosseno già seguiva, e avendo osservato quanto gli intervalli equalizzati che si ottengono in tal modo approssimano i più utili fra quelli della scala ordinaria, mi sono convinto che per lo più **vi si potrebbe attenere nella pratica**; e benché i musicisti e le orecchie più sensibili vi troveranno qualche imperfezione percepibile, pressoché tutti gli ascoltatori non ne avvertiranno alcuna, e ne saranno estasiati»

G. W. von Leibniz (1646-1716)





J. S. Bach (1685-1750)

Il Clavicembalo Ben Temperato (1722)



24 preludi e fuga in tutte le tonalità

J. Brahms (1893)

Intermezzo op. 118 n. 2

Ambiguità tonali

The image displays a musical score for Johannes Brahms' Intermezzo op. 118 n. 2, specifically measures 71 through 75. The score is written for piano and is in the key of D major (two sharps). It features a treble and bass clef. The notation includes various musical symbols such as notes, rests, and dynamic markings. The score is presented on a white background with black musical notation, and the page is framed by a yellow border on the right and bottom edges. The score is divided into two systems: the first system covers measures 71-74, and the second system covers measures 75-78. The first system shows a melodic line in the treble clef and a bass line in the bass clef, with a key signature of two sharps. The second system begins with a dynamic marking of *p rit.* (piano, ritardando) and continues with a melodic line in the treble clef and a bass line in the bass clef, with a key signature of two sharps. The second system includes dynamic markings of *dolce pp* (dolce, pianissimo) and *f* (forte).

Temperamento equabile... ma senza gerarchia

La dodecafonia di Schoenberg (1922)

The image displays two systems of handwritten musical notation for piano accompaniment. The notation is dense and complex, characteristic of Schoenberg's dodecaphony. The first system includes markings such as 'poco rit.', 'mf', 'pp', and 'p'. The second system includes markings such as '- tempo', 'p', 'mf', and 'pp'. The notation features a variety of rhythmic values, including eighth and sixteenth notes, and rests. The overall style is that of a working draft or a composer's sketch, with some annotations and corrections visible.

Abbandonando Pitagora: Temperamento equabile e Sistema tonale

Grazie!

Martino Tosi - Università Cattolica del Sacro Cuore,
Studium Musicale di Ateneo