Cube

REGIA DI VINCENZO NATALI

Interpreti: Nicole de Boer, Nicky Guadagni,
David Hewlett, Andrew Miller, Julian Richings,
Wayne Robson, Maurice Dean Wint
Sceneggiatura: Vincenzo Natali, Andre Bijekic
Fotografia: Derek Rogers
Musica: Mark Korven
Montaggio: John Sanders

Costumi: Wendy May Moore Scenografia: Jasua Stefanovic

Produzione: Mehre Meh per la Trimark Pictures, Canada (1997)

© Eagle Pictures srl, per gentile concessione

Intervista a Vincenzo Natali

Come ti è venuta l'idea di Cube?

Il soggetto è nato da esigenze puramente pratiche. Sapevo che non avrei avuto molti soldi a disposizione per il mio primo lungometraggio, pertanto ho deciso di girare in un unico ambiente. Ma volevo anche dare l'illusione di più ambienti, e soprattutto dare la possibilità alla macchina da presa e ai personaggi di essere mobili così da avere dell'azione. Mi sono ispirato anche al genere carcerario, piuttosto che a film come *Il salario della paura* di Cluzot o *Lifeboat* di Hitchcok, che mi avevano veramente impressionato per il crescendo di tensione e suspence, nonostante i personaggi passassero la maggior parte del tempo seduti!

Come si sono svolte le riprese da un punto di vista tecnico?

Abbiamo lavorato un CUBO intero e un altro a metà, formato da tre pannelli così che si potesse vedere da un CUBO all'altro. Le pareti erano di plexiglass trasparente e abbiamo usato delle gelatine per modificare il colore delle luci. Mi sono così reso conto di quanto le luci possano modificare uno stesso spazio. A seconda dell'intensità delle situazioni abbiamo inoltre variato gli angoli di illuminazione. Cube è una sorta di esercizio di stile sul tema della limitazione di mezzi e di spazi.

Hai visto Pi di Darren Aronofsky, e ci vedi delle similitudini?

Sì, indubbiamente c'è della sinergia. I due film sono stati girati nello stesso periodo e Darren Aronofsky ha la mia stessa età: credo ci sia tutta una generazione di cineasti che sta emergendo ora e che è cresciuta con Star Wars ed altre influenze comuni. Pi è però molto più sperimentale. Infatti, nonostante Cube si svolga in un luogo astratto, è un classico racconto di sopravvivenza.

Quando avete scritto la sceneggiatura di Cube, avevate un'idea precisa sulla natura del CUBO?

No, credo sia fondamentale non sapere di cosa si tratta. Il film si fonda su questo postulato ed è ciò che davvero mi interessa. Gli americani vogliono sempre spiegare e dire tutto sui personaggi. In *Cube* i personaggi si rivelano attraverso l'azione.

Raccontaci qualcosa della scena che apre il film...

Funziona come un film di James Bond e impone "d'emblèe" la situazione e le regole del gioco. Abbiamo passato un sacco di tempo a immaginare come far fuori i protagonisti! È stato faticoso perché nel corso della storia del cinema le



persone si sono fatte massacrare in tutti i modi possibili e immaginabili.

Gli effetti speciali del film non sono costati una lira. Come è stato possibile?

Fin dall'inizio ho detto al mio produttore di non contare su degli effetti speciali digitali: per la loro riuscita bisognava investire una fortuna. Lui ha voluto comunque provare a contattare una delle più importanti società che realizzano effetti speciali in Canada e questi si sono subito dimostrati interessati: se così non fosse stato, il film non si sarebbe fatto. Paradossalmente gli effetti speciali digitali fanno risparmiare tempo, e a conti fatti costano molto meno dell'utilizzo, comunque limitante, di un "motion control" o di fondali verdi.

Credo che sempre di più in futuro vedremo dei film di piccolo budget ma con effetti speciali di grande impatto.

Miramax sembra molto interessata ai giovani talenti. Sei stato contattato anche tu?

Sì, ho incontrato i fratelli Weinstein e mi piacerebbe lavorare con loro, ma l'unica proposta che mi hanno fatto è il sequel di *Cube* o di un altro film che però non mi interessa e che, sono sicuro, qualcun altro farà sicuramente meglio di me.

Non sarà forse il seguito di Mimic?

(Natali scoppia a ridere). Preferisco non dire nulla: sapete quanto sono potenti i fratelli Weinstein.

Si ringrazia la Eagle Pictures s.r.l. per aver concesso l'utilizzo dei testi e delle immagini.



La matematica di "Cube"

DAVID W. PRAVICA, HEATHER L. RIES

Immaginiamo un edificio a forma di grande cubo con l'interno diviso in stanze anch'esse a forma di cubi più piccoli ma tutti uguali fra loro. In ogni stanza ci sono sei porte che conducono ad altre stanze. Una costruzione di questo tipo potrebbe essere usata in modo utile in molte maniere diverse - per esempio potrebbe essere usata per immagazzinare parti meccaniche. Per rendere più facile l'opera di ritrovamento delle varie parti, alcune stanze sono rigide ma mobili, mentre altre possono essere rimpicciolite per consentire la creazione di percorsi verso le stanze mobili.

Supponiamo ora che tale situazione cada sotto la gestione di un matematico pazzo e criminale che decide di utilizzare i due tipi di stanze per scopi malvagi. Le stanze modificabili vengono attrezzate con trappole mortali, mentre quelle mobili rimangono sicure per chi vi entra. Supponiamo inoltre che un gruppo di persone sia tolto dalla vita di tutti i giorni e sia portato dentro al *Cubo*. Queste persone in breve tempo capiscono che alcune delle stanze sono pericolose e che la sicurezza (o la mancanza di sicurezza) di una particolare stanza è legata al suo numero di identificazione di nove cifre. Nel cercare la strada per uscire dal Cubo esse sono così poste di fronte al peggior incubo che ciascuno di noi possa avere: essere uccisi perché non si è in grado di risolvere un problema di matematica!

Il film trae gran parte della sua tensione (e non è poca) dai personaggi e dal fatto che l'ambiente in cui si trovano è diverso da come appare inizialmente. Gli aspetti matematici del film confermano soprattutto questo. I numeri di identificazione delle stanze hanno la forma

$$x_1x_2x_3$$
 $y_1y_2y_3$ $z_1z_2z_3$

in cui ogni x, y e z è una cifra compresa tra o e 9. Leaven (l'unica del gruppo dotata di talento matematico) si convince che una stanza sembra pericolosa quando una delle terne del suo numero di identificazione è un numero primo. A partire da tale ipotesi, i protagonisti si spostano allora per qualche tempo attraverso il Cubo, finché un "incidente" sfortunato dimostra la falsità di tale ipotesi. È solo molto più avanti nel film che Leaven riesce a decifrare la chiave giusta – le stanze-trappola sono numerate con una terna che è un numero primo oppure la potenza di un primo.

Dal momento che i prigionieri del Cubo vengono lasciati senza cibo né acqua, è indispensabile che essi trovino una strategia che li conduca fuori dal labi-

rinto il più in fretta possibile. Leaven intuisce che il Cubo è stato suddiviso in $26 \times 26 \times 26$ cubi più piccoli e che per indicare la posizione dei cubi più piccoli contenuti nel Cubo più grande viene usato un sistema di coordinate tridimensionale con origine nell'angolo più basso. Le coordinate (x, y, z) della stanza sono legate al numero di identificazione dalla legge: $x = x_1 + x_2 + x_3$, $y = y_1 + y_2 + y_3$, e $z = z_1 + z_2 + z_3$. In quel momento, i protagonisti si trovano nella stanza 517 478 565 che ha coordinate (13, 19, 16). Poiché questo vorrebbe dire che sono a sette stanze dal bordo esterno, essi decidono di spostarsi nella direzione positiva delle y fino a raggiungere l'uscita. Ma ancora una volta, non è così semplice: le stanze si muovono! E le coordinate cartesiane che pure rappresentavano la posizione originale della stanza non sono quelle che ne individuano la posizione attuale.

Leaven ricorda che sono passati in una stanza con la coordinata y uguale a 27. Questa stanza, quando si trovava nella sua posizione originale, era nella parte esterna del Cubo e forse potrebbe fornire un ponte verso il mondo al di fuori. Allora essa calcola il numero dei movimenti che sono necessari per riportare le stanze nelle loro posizioni di partenza. E l'obiettivo diventa quello di ritornare in quella stanza prima che essa ritorni alla sua posizione iniziale.

Quando incontrano per caso la stanza nella quale originariamente si trovavano, i prigionieri si rendono conto che alla fine essa si muoverà verso una posizione vicina alla parte più esterna del Cubo e sperano di riuscire a guadagnare un'uscita.

Ciò che segue è la matematica che governa i movimenti delle stanze. Si noti che il numero di identificazione incorpora sia la posizione originale della stanza che il suo movimento. E che ciascuna coordinata x, y, z ritorna al valore originale dopo almeno tre movimenti. Una scelta accurata dei numeri di identificazione permette di controllare la natura dei movimenti delle stanze, come pure il numero dei movimenti che occorrono per tornare alla posizione originale.

Dettagli matematici:

Notazione: $Z_N = \{0, 1, 2,...N-1\}$

Definizione. Una stringa è una terna $x_1 x_2 x_3$ dove $x_i \in \mathbb{Z}_N$

In questo ambito è N = 10.

Per ottenere la coordinata x di una cubo, creiamo un numero usando la funzione:

$$\phi_x: \mathbf{Z}_{10}^3 \to \mathbf{Z}_{28},$$

definita da ϕ_x (\vec{x}) = $x_1 + x_2 + x_3 = x$. E analogamente otteniamo le coordinate y, z definendo le funzioni ϕ_y , ϕ_z . Si noti che ϕ_x (000) = 0 + 0 + 0 = 0 e che ϕ_x (999) = 9 + 9 + 9 = 27 sono le coordinate più piccole e più grandi in ciascuna delle direzioni x, y, z.

Definizione. Le tre azioni da $Z_{10}^3 o Z_{10} \cup -Z_{10}$ sono definite da

$$a_1(\vec{x}) = a_1(x_1x_2x_3) \equiv x_1 - x_2$$

$$a_2(\vec{x}) = a_2(x_1x_2x_3) \equiv x_2 - x_3$$

$$a_3(\vec{x}) = a_3(x_1x_2x_3) \equiv x_3 - x_1.$$

Si noti che $a_1+a_2+a_3$ è la mappa nulla su Z_{10}^3 . Definizioni. L'azione destra da $Z_{10}^3 \to (Z_{10} \cup -Z_{10})^3$ è definita ponendo $\psi_{R_x}(\vec{x})$ $= \psi_{Rx} \ (x_1 x_2 x_3) \equiv [a_1 a_2 a_3] = \vec{a}.$

Così la stringa $x_1x_2x_3$ codifica la posizione e i cambiamenti nella posizione. Ora consideriamo il sottoinsieme di $\not \supset (Z_{10}^3 \oplus (Z_{10} \cup -Z_{10})^3)$ definito ponendo

Costruiamo la corrispondente funzione di movimento,

$$\Psi_{Rr}: \not \! D \rightarrow \mathbb{Z}^3_{28}$$

definendo,

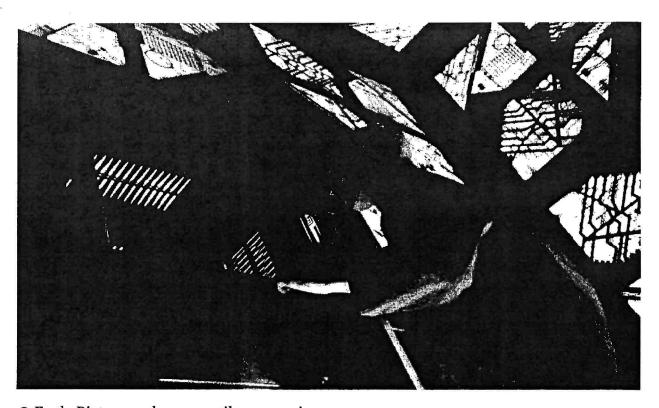
$$\Psi_{Rx}(\vec{x}, \vec{a}) \equiv \{ \psi_x(\vec{x}) + a_1, \psi_x(\vec{x}) + a_1 + a_2, \psi_x(\vec{x}) + a_1 + a_2 + a_3 \},$$

così per una data coordinata x, dove $x = \phi_x(\vec{x})$, x si sposta da x a $x + a_1$ e poi a x $+a_1+a_2$ e infine a $x+a_1+a_2+a_3$ che è x. Per vedere che l'immagine di Ψ_{Rx} è contenuta \mathbb{Z}_{28}^3 si noti che,

$${x + a_1, x + a_1 + a_2, x} = {2x_1 + x_3, 2x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3}.$$

Poiché $0 \le x_i \le 9$, ogni componente è chiaramente compresa tra 0 e 27.

Gli esempi seguenti mostrano come le funzioni qui sopra determinino il cambiamento nella coordinata x di una posizione. Supponiamo di partire dalla stringa 909, così che la coordinata x della posizione sia x = 9 + 0 + 9 = 18. L'azione a destra è ψ_{Rx} (909) = [9, –9,0]. L'applicazione della mappa di movimento ci dà Ψ_{Rx}



© Eagle Pictures srl, per gentile concessione

 $(909, [9, -9, 0]) = \{27, 18, 18\}$. Così la coordinata x della posizione cambia da 18 a 27 a 18 e poi resta a 18. Questo è un esempio di ciò a cui ci riferiamo qui sotto come una singola azione.

Ora supponiamo $x_1x_2x_3=123$ così che l'iniziale coordinata x sia 6. Ne segue ψ_{Rx} (1 2 3)= [-1, -1, 2] e ψ_{Rx} (123, [-1, -1, 2]) = {5, 4, 6}. Così la coordinata x si sposta a 5 poi a 4 e indietro a 6. Questo è un esempio di un'azione completa.

Si noti che azioni a destra analoghe (ψ_{Ry} e ψ_{Rz}) e funzioni di movimento (Ψ_{Ry} e Ψ_{Rz}) sono definite per governare il movimento delle coordinate y e z di una posizione.

Sia $max\{\Psi_{Rx}(\vec{x}, \vec{a})\}$ la componente più grande di $\Psi_{Rx}(\vec{x}, \vec{a})$ e sia $min\{\Psi_{Rx}(\vec{x}, \vec{a})\}$ la più piccola. Il successivo lemma mostra che il movimento di ogni coordinata x (y oppure z) non può totalizzare più di 9 unità.

Lemma. $0 \le \max\{\Psi_{Rx}(\vec{x}, \vec{a})\} - \max\{\Psi_{Rx}(\vec{x}, \vec{a})\} \le 9$

Dimostrazione. Osservando che vale $\Psi_{Rx}(\vec{x}, \vec{a}) = [x + a_1, x + a_1 + a_2, x]$ e prendendo successive differenze tra le componenti, noi otteniamo $(x + a_1) - (x - a_2)$ $= a_1 + a_2 = -a_2, (x + a_3) - x = -a_3, e x - (x + a_1) = -a_1.$

Ora $\max\{\Psi_{Rx}(\vec{x}, \vec{a})\}$ – $\min\{\Psi_{Rx}(\vec{x}, \vec{a})\}$ è il valore assoluto di una di queste dif-

ferenze e vale $-9 \le a_i \le 9$, così che il lemma è dimostrato.

Si noti che se abbiamo un vettore $\{X_1, X_2, X_3\} \in \mathbb{Z}_{28}^3$ con $0 \le |X_i - X_j| \le 9$, può accadere che non sia possibile trovare una stringa $x_1x_2x_3$ con Ψ_{Rx} $(\vec{x}, \vec{a}) = \{X_1, X_2, X_2\}$. Per esempio, si consideri $\{1, 2, 4\} \in \mathbb{Z}_{28}^3$. Non c'è nessuna terna $x_1x_2x_3$ con $x = x_1 + x_2 + x_3 = 4$ tale che valga Ψ_{Rx} $(\vec{x}, \vec{a}) = \{1, 2, 4\}$. Così nessun ciclo di posizioni a tre passi può essere ottenuto.

Poiché il vettore di un'azione è della forma $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ con $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, esso può contenere nessuno zero, uno zero o tre zeri. Abbiamo così la seguente

Definizione. Ci sono tre tipi di azioni su $x \in \mathbb{Z}_{28}^3$,

Identità: $\vec{a} \equiv [0, 0, 0]$,

Singola: $\vec{a} \equiv [0, \alpha, -\alpha]$ o $[\alpha, -\alpha, 0]$ o $[\alpha, 0, -\alpha]$, $\alpha \neq 0$,

Totale: $\vec{a} \equiv [a_1, a_2, a_3] \text{ con } a_i \neq 0.$

Si noti che l'azione identità è ottenuta da stringhe della forma $x_1x_2x_3$ con $x_1 = x_2 = x_3$. Un'azione singola è ottenuta da stringhe della forma $x_1x_2x_3$ dove $x_1 = x_2 \neq x_3$, $x_1 = x_3 \neq x_4$, o $x_2 = x_3 \neq x_1$. Un'azione totale è ottenuta da stringhe della forma $x_1x_2x_3$ dove $x_1 \neq x_2$, $x_1 \neq x_3$, $x_2 \neq x_3$.

Poiché i vettori d'azione \vec{a} sono calcolati da stringhe $x_1x_2x_3 \in \mathbb{Z}_{28}^3$ e una coordinata x in \mathbb{Z}_{28} può essere rappresentata da diverse espressioni $x = x_1 + x_2 + x_3$, ci possono essere molte azioni associate alla stessa coordinata x. Il seguente lemma descrive quali tipi di azioni sono possibili per varie coordinate x.

Lemma. Le coordinate x=0 e x=27 hanno solo l'azione di identità. Le coordinate x uguali a 1, 2, 25 e 26 hanno solo un'azione singola. Le altre coordinate $x \in \mathbb{Z}_{28}$ non divisibili per tre possono avere sia azioni singole sia azioni totali. Infine, le coordinate divisibili per tre (eccetto 0) avranno tutti i 3 i tipi di azioni.

Dimostrazione. L'unica sequenza che rappresenta x=0 è 000 e quella che rappresenta x=27 è 999 che danno $\vec{a}=[0,0,0]$. Le uniche sequenze per x=1 sono 100, 010, 001 che danno solo azioni singole poiché contengono due zeri. Analogamente, x=26 può solo derivare da 899, 989, 998. Le uniche sequenze che rappresentano 2 conterranno un 2 e due 0 (per es. 200) oppure due 1 e uno 0 (per es.

110). Poiché contengono due 0 o due 1, esse daranno luogo ad azioni singole. Nel caso di x = 25 una sequenza avrà sia un 7 e due 9 o un 9 e due 8. Entrambe danno azioni singole.

Supponiamo ora $x \in \mathbb{Z}_{28}$ ma $x_1 \neq 0$, 1, 2. Per l'algoritmo della divisione x = 3q + r dove $1 \leq q < 9$ e $0 \leq r < 3$. Se r = 1 o 2, allora la stringa (q + r)qq è tale che $\phi_x((q+r)qq) = x$ e ha come azione singola associata $\vec{a} = \psi_{Rx}((q+r)qq) = [r,0,-r]$. La stringa (3q)r0 è tale che $\phi_x((3q)r0) = x$ e ha l'azione totale associata $\vec{a} = \psi_{Rx}((3q)r0) = [3q - r, r, -3q]$. L'azione identità non può essere ottenuta perché x non può essere rappresentato da una stringa della forma $x_1x_2x_3$ con $x_1 = x_2 = x_3$.

Ora che abbiamo stabilito i possibili movimenti dentro il Cubo, ritorniamo ai particolari del film. Il gruppo dei protagonisti comprende che le stanze stanno spostandosi per ritornare (come è attestato dai resti di una precedente sconfitta) alla stanza con il numero di identificazione

Leaven ricava lo schema che governa il movimento delle stanze quando annuncia: "Questa stanza si sposta verso 0, 1, -1 sull'asse x, 2, 5, -7 sulla y, e 1, -1, 0 sulla z." Poiché queste sono le immagini delle azioni destre applicate rispettivamente a 665, 972 e 545. Applicando le funzioni di movimento, vediamo che la coordinata x inizia a 17, rimane a 17 e poi si sposta a 18 prima di tornare a 17. La coordinata y parte da 18, si sposta a 20, e poi a 25. La coordinata z parte da 14, si sposta a 15, poi ritorna a 14 e lì rimane. Alternando i movimenti delle coordinate x, y e z le effettive posizioni diventano, tenendo conto delle tre dimensioni,

partenza =
$$(17,18,14) \rightarrow (17,18,14) \rightarrow (17,20,14) \rightarrow$$

 $(17,20,15) \rightarrow (18,20,15) \rightarrow (18,25,15) \rightarrow$
 $(18,25,14) \rightarrow (17,25,14)^* \rightarrow (17,18,14) \rightarrow \text{partenza}$

Per calcolare quanti movimenti occorreranno alle stanze per raggiungere le loro posizioni originali, Leaven innanzitutto calcola i succitati movimenti per la stanza in cui si trovano. Poi chiede i numeri ID [identificativi] delle tre stanze adiacenti e calcola i loro movimenti. Ne conclude che l'unico modo in cui queste stanze potrebbero essere vicine l'una all'altra (come è mostrato dalle successive coordinate x e y delle loro posizioni) è che ciascuna di loro si sia spostata sette volte dalla posizione originaria. Così le loro coordinate attuali sono (17, 25, 14), come è segnalato dall'asterisco * nella formula precedente, e ciò richiederà per le stanze due ulteriori movimenti al fine di raggiungere le loro posizioni originarie dentro il Cubo.

Se i gruppi faranno ritorno alla stanza-ponte in tempo per uscire, avranno usato la matematica per salvarsi dalla forza che li ha portati nel Cubo. Rimane aperta la domanda (nelle parole dell'originario fallimento di Rennes) se essi possano "salvarsi da loro stessi".



II Cubo

MICHELE EMMER

Uno dei teoremi più antichi dimostrati dall'umanità è quello noto con il nome di Teorema dei numeri primi. Nel libro IX degli Elementi di Euclide (vissuto ad Alessandria intorno al 300 a.C.) la proposizione 20 afferma che i numeri primi sono infiniti. Lo stabilire se un numero è primo oppure no, ovvero il problema della fattorizzazione dei numeri, ha una grande importanza nella creazione di codici che sono utilizzati per informazioni riservate. I numeri primi, le potenze dei numeri primi, la combinazione e permutazione dei numeri sono alla base dell'enigma del film Cubo. In inglese Cube, mentre incubo si può tradurre Incubus. Un film angoscioso, che si svolge all'interno di un sistema di cubi che si muovono ogni tanto all'interno di un grande spazio cubico. Una specie di enorme cubo di Rubik. Dentro i cubi più piccoli sono catturati alcuni personaggi; non sapremo mai perché. Questi uomini e donne prigionieri nei cubi cercano di capire se vi sia una via di uscita. Ogni cubo è collegato con altri cubi tramite aperture sulle diverse pareti del cubo in cui ci si trova. Le pareti del cubo sono sei; in ogni cubo ci sono sei uscite. Come scoprono molto presto i protagonisti, in molti dei cubi confinanti a quello in cui ci si trova, sono inserite delle trappole mortali. Il problema è quindi di capire in quale direzione andare ogni volta che si entra in un nuovo cubo che sia senza trappole; bisogna poi capire qual è la geometria in cui sono inseriti i diversi cubi per riuscire a capire se vi è modo di uscire. Tra i sei personaggi c'è una studentessa di matematica, che si accorge abbastanza presto che ogni ingresso che porta in un altro cubo è contrassegnato da un numero molto grande di nove cifre. Formula una prima ipotesi: se il numero in questione è primo, la stanza non è pericolosa. La regola funziona ma sino a un certo punto. Dovrà poi cercare una soluzione più sofisticata. Inoltre bisogna capire anche la posizione del cubo in cui ci si trova rispetto al "cubone" che li contiene tutti. In più periodicamente i cubi si muovono. Come si muovono? Dove arrivano? Indicando ogni cubo con tre numeri, le tre coordinate cartesiane, la studentessa di matematica riesce a capire dove ci si trova e dove si deve andare.

Il film è tutto giocato sulla grande abilità del giovane regista italo-canadese Vincenzo Natali di sfruttare al massimo la macchina da presa negli spazi angusti, claustrofobici, i "cubi", in cui si svolge tutto il film. Ci riesce molto bene, alternando la camera a mano, il fish eye a carrellate per rendere ancora più chiuso lo spazio. Un film senza un finale, in cui nulla si saprà di chi ha inventato quello spazio, per quale ragione. Viene l'ansia di riuscire ad uscire, a salvarsi. La matematica come incubo, la matematica come mistero, la matematica come fascino. Quanti sono che hanno capito come fa la studentessa a trovare la soluzione? Un enigma mentale che si aggiunge all'incubo fisico.

