Lontano e vicino: cosa intendiamo quando parliamo di distanza (cosa fa un matematico?)

Enrico Miglierina

Università Cattolica del Sacro Cuore - Milano

PCTO

Outline

Outline

Due citazioni

"Per un matematico di professione è un'esperienza melanconica mettersi a scivere sulla matematica. La funzione del matematico è quella di fare qualcosa, di dimostrare nuovi teoremi e non di parlare di ciò che è stato fatto da altri matematici o da lui stesso."
da *Apologia di un matematico* - G.H. Hardy

"Il matematico è l'unico lavoro per cui si può dire: mi sdraio sul divano, chiudo gli occhi e comincio a lavorare"
Direttore di un centro di ricerca dell' AT&T

Due citazioni

"Per un matematico di professione è un'esperienza melanconica mettersi a scivere sulla matematica. La funzione del matematico è quella di fare qualcosa, di dimostrare nuovi teoremi e non di parlare di ciò che è stato fatto da altri matematici o da lui stesso."
da *Apologia di un matematico* - G.H. Hardy

"Il matematico è l'unico lavoro per cui si può dire: mi sdraio sul divano, chiudo gli occhi e comincio a lavorare"
Direttore di un centro di ricerca dell' AT&T

Una domanda

La domanda che in occasioni “mondane” si rivolge più spesso a un matematico è “ che cosa significa fare ricerca in matematica ?...in cosa consiste il tuo lavoro ?...Insegni e poi?...”

In definitiva:

Una domanda

La domanda che in occasioni “mondane” si rivolge più spesso a un matematico è “ che cosa significa fare ricerca in matematica ?...in cosa consiste il tuo lavoro ?...Insegni e poi?...”
In definitiva:

Che cosa fa un matematico ?

Di primo acchito la risposta potrebbe essere: "Dipende...da quale campo si occupa, da che temi tratta, se è più rivolto alle applicazioni oppure se si dedica ad aspetti più teorici....."
Si finirebbe in un ginepraio di distinguo per nulla chiari ed in definitiva, forse, poco interessanti.

Che cosa fa un matematico ?

Di primo acchito la risposta potrebbe essere: “Dipende...da quale campo si occupa, da che temi tratta, se è più rivolto alle applicazioni oppure se si dedica ad aspetti più teorici.....”

Si finirebbe in un ginepraio di distinguo per nulla chiari ed in definitiva, forse, poco interessanti.

Che cosa fa un matematico ?

Di primo acchito la risposta potrebbe essere: “Dipende...da quale campo si occupa, da che temi tratta, se è più rivolto alle applicazioni oppure se si dedica ad aspetti più teorici.....”
Si finirebbe in un ginepraio di distinguo per nulla chiari ed in definitiva, forse, poco interessanti.

Un tentativo di risposta

Per cercare di dare una risposta a questa domanda mi servirò di un esempio che, a mio modo di vedere, illustra molto bene alcuni fra gli elementi principali del attività matematica. Questi aspetti accomunano tutte le diverse branche della matematica.

La nozione di distanza

Cercheremo di introdurre la nozione di distanza servendoci di un approccio matematico e svilupperemo alcune conseguenze che ne scaturiscono.

Un tentativo di risposta

Per cercare di dare una risposta a questa domanda mi servirò di un esempio che, a mio modo di vedere, illustra molto bene alcuni fra gli elementi principali del attività matematica. Questi aspetti accomunano tutte le diverse branche della matematica.

La nozione di distanza

Cercheremo di introdurre la nozione di distanza servendoci di un approccio matematico e svilupperemo alcune conseguenze che ne scaturiscono.

Outline

Il metodo matematico (a grandissime linee)

Da un punto di vista matematico, per descrivere un oggetto, si cerca di individuare le proprietà che questo oggetto deve possedere.

Esempio - I numeri pari

numero pari $\Longleftrightarrow$ essere divisibile per 2

Nel corso di questa operazione particolare attenzione deve essere dedicata ad individuare le proprietà rilevanti ma anche ad assicurarsi che esse siano, in un certo senso, minimali. In altre parole, le proprietà individuate devono essere sufficienti ad individuare l'oggetto in questione, senza però essere superflue o legate a casi particolari.

Il metodo matematico (a grandissime linee)

Da un punto di vista matematico, per descrivere un oggetto, si cerca di individuare le proprietà che questo oggetto deve possedere.

Esempio - I numeri pari

$$\text{numero pari} \Longleftrightarrow \text{essere divisibile per } 2$$

Nel corso di questa operazione particolare attenzione deve essere dedicata ad individuare le proprietà rilevanti ma anche ad assicurarsi che esse siano, in un certo senso, minimali. In altre parole, le proprietà individuate devono essere sufficienti ad individuare l'oggetto in questione, senza però essere superflue o legate a casi particolari.

Il metodo matematico (a grandissime linee)

Da un punto di vista matematico, per descrivere un oggetto, si cerca di individuare le proprietà che questo oggetto deve possedere.

Esempio - I numeri pari

numero pari $\Longleftrightarrow$ essere divisibile per 2

Nel corso di questa operazione particolare attenzione deve essere dedicata ad individuare le proprietà rilevanti ma anche ad assicurarsi che esse siano, in un certo senso, minimali. In altre parole, le proprietà individuate devono essere sufficienti ad individuare l'oggetto in questione, senza però essere superflue o legate a casi particolari.

Outline

Idea naturale di distanza

Il concetto di distanza è sufficientemente naturale per essere considerato, in un primo tempo (almeno se non si pensa a paradossi alla Zenone), come un dato acquisito.

Tuttavia alcune osservazioni sono immediate:

- alla nozione di distanza sono strettamente correlate le parole "vicino" e "lontano";
- queste nozioni dipendono in modo essenziale da circostanze fisiche (più in generale contingenti) che sono essenzialmente estranee al concetto di distanza;
- infatti ha grande rilevanza la scala d'uso: due oggetti vicini per un astronomo saranno lontanissimi per un ingegnere e ancora di più per un microbiologo (si osservi come, usualmente, viene spontaneo quando si parla di distanza esplicitare un'unità di misura).

Idea naturale di distanza

Il concetto di distanza è sufficientemente naturale per essere considerato, in un primo tempo (almeno se non si pensa a paradossi alla Zenone), come un dato acquisito.
Tuttavia alcune osservazioni sono immediate:

- alla nozione di distanza sono strettamente correlate le parole "vicino" e "lontano";
- queste nozioni dipendono in modo essenziale da circostanze fisiche (più in generale contingenti) che sono essenzialmente estranee al concetto di distanza;
- infatti ha grande rilevanza la scala d'uso: due oggetti vicini per un astronomo saranno lontanissimi per un ingegnere e ancora di più per un microbiologo (si osservi come, usualmente, viene spontaneo quando si parla di distanza esplicitare un'unità di misura).

Idea naturale di distanza

Il concetto di distanza è sufficientemente naturale per essere considerato, in un primo tempo (almeno se non si pensa a paradossi alla Zenone), come un dato acquisito.
Tuttavia alcune osservazioni sono immediate:

- alla nozione di distanza sono strettamente correlate le parole "vicino" e "lontano";
- queste nozioni dipendono in modo essenziale da circostanze fisiche (più in generale contingenti) che sono essenzialmente estranee al concetto di distanza;
- infatti ha grande rilevanza la scala d'uso: due oggetti vicini per un astronomo saranno lontanissimi per un ingegnere e ancora di più per un microbiologo (si osservi come, usualmente, viene spontaneo quando si parla di distanza esplicitare un'unità di misura).

Idea naturale di distanza

Il concetto di distanza è sufficientemente naturale per essere considerato, in un primo tempo (almeno se non si pensa a paradossi alla Zenone), come un dato acquisito.
Tuttavia alcune osservazioni sono immediate:

- alla nozione di distanza sono strettamente correlate le parole "vicino" e "lontano";
- queste nozioni dipendono in modo essenziale da circostanze fisiche (più in generale contingenti) che sono essenzialmente estranee al concetto di distanza;
- infatti ha grande rilevanza la scala d'uso: due oggetti vicini per un astronomo saranno lontanissimi per un ingegnere e ancora di più per un microbiologo (si osservi come, usualmente, viene spontaneo quando si parla di distanza esplicitare un'unità di misura).

Idea naturale di distanza

Il concetto di distanza è sufficientemente naturale per essere considerato, in un primo tempo (almeno se non si pensa a paradossi alla Zenone), come un dato acquisito.
Tuttavia alcune osservazioni sono immediate:

- alla nozione di distanza sono strettamente correlate le parole "vicino" e "lontano";
- queste nozioni dipendono in modo essenziale da circostanze fisiche (più in generale contingenti) che sono essenzialmente estranee al concetto di distanza;
- infatti ha grande rilevanza la scala d'uso: due oggetti vicini per un astronomo saranno lontanissimi per un ingegnere e ancora di più per un microbiologo (si osservi come, usualmente, viene spontaneo quando si parla di distanza esplicitare un'unità di misura).

Idea naturale di distanza

Il concetto di distanza è sufficientemente naturale per essere considerato, in un primo tempo (almeno se non si pensa a paradossi alla Zenone), come un dato acquisito.
Tuttavia alcune osservazioni sono immediate:

- alla nozione di distanza sono strettamente correlate le parole "vicino" e "lontano";
- queste nozioni dipendono in modo essenziale da circostanze fisiche (più in generale contingenti) che sono essenzialmente estranee al concetto di distanza;
- infatti ha grande rilevanza la scala d'uso: due oggetti vicini per un astronomo saranno lontanissimi per un ingegnere e ancora di più per un microbiologo (si osservi come, usualmente, viene spontaneo quando si parla di distanza esplicitare un'unità di misura).

Outline

1. Introduzione
   - Una domanda naturale
   - Il metodo matematico
2. La nozione di distanza (o metrica)
   - L'idea naturale di distanza
   - Verso la nozione astratta di distanza
3. Esempi di metriche
   - Metrica del taxista
   - La metrica della valle
   - La metrica del centro
   - Metrica di Hamming
4. La geometria come cambia?

Il metodo matematico applicato alla distanza

Proviamo ora a svincolarci da questa "pesantezza" naturale e dal problema dell'unità di misura e a introdurre un'idea di distanza più "astratta". Per far ciò utilizzeremo il metodo matematico. Dobbiamo perciò:

- individuare quali proprietà caratterizzano il concetto di distanza;
- assicurarci che tali proprietà siano minimali.

Per far questo, prenderemo spunto dall'analisi di un esempio.

Il metodo matematico applicato alla distanza

Proviamo ora a svincolarci da questa "pesantezza" naturale e dal problema dell'unità di misura e a introdurre un'idea di distanza più "astratta". Per far ciò utilizzeremo il metodo matematico. Dobbiamo perciò:

- individuare quali proprietà caratterizzano il concetto di distanza;
- assicurarci che tali proprietà siano minimali.

Per far questo, prenderemo spunto dall'analisi di un esempio.

Il metodo matematico applicato alla distanza

Proviamo ora a svincolarci da questa "pesantezza" naturale e dal problema dell'unità di misura e a introdurre un'idea di distanza più "astratta". Per far ciò utilizzeremo il metodo matematico.
Dobbiamo perciò:

- individuare quali proprietà caratterizzano il concetto di distanza;
- assicurarci che tali proprietà siano minimali.

Per far questo, prenderemo spunto dall'analisi di un esempio.

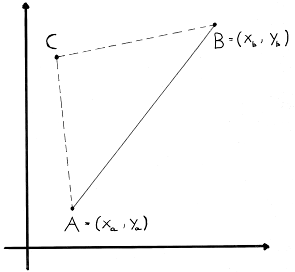
Il metodo matematico applicato alla distanza

Proviamo ora a svincolarci da questa "pesantezza" naturale e dal problema dell'unità di misura e a introdurre un'idea di distanza più "astratta". Per far ciò utilizzeremo il metodo matematico.
Dobbiamo perciò:

- individuare quali proprietà caratterizzano il concetto di distanza;
- assicurarci che tali proprietà siano minimali.

Per far questo, prenderemo spunto dall'analisi di un esempio.

La distanza (euclidea) nel piano

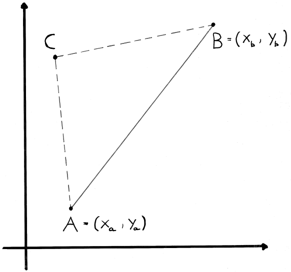


$$d(A,B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

Distanza (o Metrica) Euclidea

- Siano A e B due punti del piano;
- la distanza tra A e B (indicata con $d(A,B)$) è data dalla lunghezza del segmento che congiunge A e B.

La distanza (euclidea) nel piano



$$d(A,B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

Distanza (o Metrica) Euclidea

- Siano A e B due punti del piano;
- la distanza tra A e B (indicata con $d(A,B)$) è data dalla lunghezza del segmento che congiunge A e B.

Le proprietà della distanza

- Vogliamo essere capaci di stabilire la distanza tra due elementi di un generico insieme. Un buon metodo potrebbe essere quello di assegnare ad ogni coppia di elementi un numero non negativo. Questo numero potrà essere uguale a zero se e solo se i due oggetti di cui misuro la distanza sono in realtà lo stesso oggetto.
- Risulta inoltre naturale chiedere che la distanza sia simmetrica, cioè la distanza tra A e B sia uguale a quella tra B e A.
- Infine, dati tre elementi A, B e C la distanza tra A e B deve essere minore o al più uguale alla distanza di A da C più quella di B da C.

Le proprietà della distanza

- Vogliamo essere capaci di stabilire la distanza tra due elementi di un generico insieme. Un buon metodo potrebbe essere quello di assegnare ad ogni coppia di elementi un numero non negativo. Questo numero potrà essere uguale a zero se e solo se i due oggetti di cui misuro la distanza sono in realtà lo stesso oggetto.
- Risulta inoltre naturale chiedere che la distanza sia simmetrica, cioè la distanza tra A e B sia uguale a quella tra B e A.
- Infine, dati tre elementi A, B e C la distanza tra A e B deve essere minore o al più uguale alla distanza di A da C più quella di B da C.

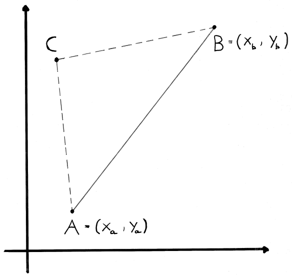
Le proprietà della distanza

- Vogliamo essere capaci di stabilire la distanza tra due elementi di un generico insieme. Un buon metodo potrebbe essere quello di assegnare ad ogni coppia di elementi un numero non negativo. Questo numero potrà essere uguale a zero se e solo se i due oggetti di cui misuro la distanza sono in realtà lo stesso oggetto.
- Risulta inoltre naturale chiedere che la distanza sia simmetrica, cioè la distanza tra A e B sia uguale a quella tra B e A.
- Infine, dati tre elementi A, B e C la distanza tra A e B deve essere minore o al più uguale alla distanza di A da C più quella di B da C.

Le proprietà della distanza

- Vogliamo essere capaci di stabilire la distanza tra due elementi di un generico insieme. Un buon metodo potrebbe essere quello di assegnare ad ogni coppia di elementi un numero non negativo. Questo numero potrà essere uguale a zero se e solo se i due oggetti di cui misuro la distanza sono in realtà lo stesso oggetto.
- Risulta inoltre naturale chiedere che la distanza sia simmetrica, cioè la distanza tra A e B sia uguale a quella tra B e A.
- Infine, dati tre elementi A, B e C la distanza tra A e B deve essere minore o al più uguale alla distanza di A da C più quella di B da C.

La disuguaglianza triangolare



$$d(A,B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

Disuguaglianza triangolare

L'ultima proprietà prende il nome di disuguaglianza triangolare, richiamando così la nota proprietà dei triangoli per cui la lunghezza di un lato è sempre minore o uguale alla somma degli altri due.

Riassumendo

La distanza, detta anche metrica, è una funzione d che ad ogni coppia di elementi A e B di un insieme associa un numero non negativo in modo che:

1. $0 \leq d(A,B)$ e $d(A,B) = 0$ se e solo se $A = B$;
2. $d(A,B) = d(B,A)$;
3. $d(A,B) \leq d(A,C) + d(B,C)$.

- Un insieme S di oggetti per cui sia definita una metrica d si chiama spazio metrico.

Esempio

Consideriamo l'insieme S =piano e d =metrica euclidea (cioè la distanza tra due punti è data dalla lunghezza del segmento che li congiunge).

Riassumendo

La distanza, detta anche metrica, è una funzione d che ad ogni coppia di elementi A e B di un insieme associa un numero non negativo in modo che:

1. $0 \leq d(A,B)$ e $d(A,B) = 0$ se e solo se $A = B$;
2. $d(A,B) = d(B,A)$;
3. $d(A,B) \leq d(A,C) + d(B,C)$.

- Un insieme S di oggetti per cui sia definita una metrica d si chiama spazio metrico.

Esempio

Consideriamo l'insieme S =piano e d =metrica euclidea (cioè la distanza tra due punti è data dalla lunghezza del segmento che li congiunge).

Riassumendo

La distanza, detta anche metrica, è una funzione d che ad ogni coppia di elementi A e B di un insieme associa un numero non negativo in modo che:

1. $0 \leq d(A,B)$ e $d(A,B) = 0$ se e solo se $A = B$;
2. $d(A,B) = d(B,A)$;
3. $d(A,B) \leq d(A,C) + d(B,C)$.

- Un insieme S di oggetti per cui sia definita una metrica d si chiama spazio metrico.

Esempio

Consideriamo l'insieme $S =$piano e $d =$metrica euclidea (cioè la distanza tra due punti è data dalla lunghezza del segmento che li congiunge).

Alcune osservazioni

Perchè abbiamo scelto queste proprietà e non altre? Le risposte a questa domanda sono più d'una:

- queste proprietà sembrano essere essenziali per ogni ragionevole nozione di distanza;
- risultano anche essere minimali, cioè senza la loro validità non potremmo parlare di distanza;
- a posteriori, questa nozione di distanza è giustificata anche dai successi ottenuti nello sviluppo della teoria.

Si osservi come nella nostra definizione non entri in gioco alcuna unità di misura.

Alcune osservazioni

Perchè abbiamo scelto queste proprietà e non altre? Le risposte a questa domanda sono più d'una:

- queste proprietà sembrano essere essenziali per ogni ragionevole nozione di distanza;
- risultano anche essere minimali, cioè senza la loro validità non potremmo parlare di distanza;
- a posteriori, questa nozione di distanza è giustificata anche dai successi ottenuti nello sviluppo della teoria.

Si osservi come nella nostra definizione non entri in gioco alcuna unità di misura.

Alcune osservazioni

Perchè abbiamo scelto queste proprietà e non altre? Le risposte a questa domanda sono più d'una:

- queste proprietà sembrano essere essenziali per ogni ragionevole nozione di distanza;
- risultano anche essere minimali, cioè senza la loro validità non potremmo parlare di distanza;
- a posteriori, questa nozione di distanza è giustificata anche dai successi ottenuti nello sviluppo della teoria.

Si osservi come nella nostra definizione non entri in gioco alcuna unità di misura.

Alcune osservazioni

Perchè abbiamo scelto queste proprietà e non altre? Le risposte a questa domanda sono più d'una:

- queste proprietà sembrano essere essenziali per ogni ragionevole nozione di distanza;
- risultano anche essere minimali, cioè senza la loro validità non potremmo parlare di distanza;
- a posteriori, questa nozione di distanza è giustificata anche dai successi ottenuti nello sviluppo della teoria.

Si osservi come nella nostra definizione non entri in gioco alcuna unità di misura.

Alcune osservazioni

Perchè abbiamo scelto queste proprietà e non altre? Le risposte a questa domanda sono più d'una:

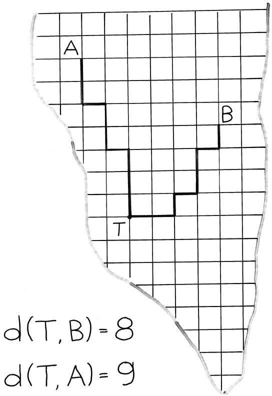
- queste proprietà sembrano essere essenziali per ogni ragionevole nozione di distanza;
- risultano anche essere minimali, cioè senza la loro validità non potremmo parlare di distanza;
- a posteriori, questa nozione di distanza è giustificata anche dai successi ottenuti nello sviluppo della teoria.

Si osservi come nella nostra definizione non entri in gioco alcuna unità di misura.

Outline

1. Introduzione
   - Una domanda naturale
   - Il metodo matematico
2. La nozione di distanza (o metrica)
   - L'idea naturale di distanza
   - Verso la nozione astratta di distanza
3. Esempi di metriche
   - Metrica del taxista
   - La metrica della valle
   - La metrica del centro
   - Metrica di Hamming
4. La geometria come cambia?

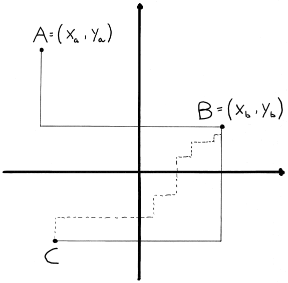
Un taxista a Manhattan



Pensiamo ad un taxista a Manhattan. A causa della planimetria della città, egli può muoversi solo lungo linee orizzontali e verticali che rappresentano Streets e Avenue.

Per raggiungere, partendo dal parcheggio T, il cliente in A deve percorrere 9, mentre per andare in B deve percorrere 8.

La metrica del taxista - I

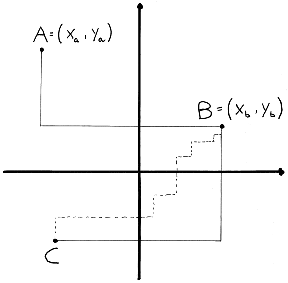


$$d(A,B) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$$

Metrica del Taxista (o ℓ_1)

- Siano A e B due punti del piano;
- la distanza tra A e B (indicata con $d(A, B)$) è data dalla lunghezza del percorso che congiunge A e B, costruito tenendo conto del vincolo che impone di muoversi solo lungo linee orizzontali e verticali.

La metrica del taxista - I

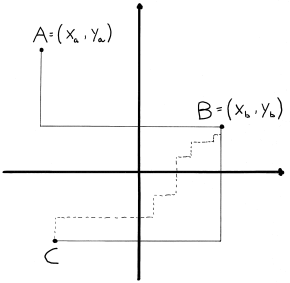


$$d(A,B) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$$

Metrica del Taxista (o ℓ_1)

- Siano A e B due punti del piano;
- la distanza tra A e B (indicata con $d(A,B)$) è data dalla lunghezza del percorso che congiunge A e B, costruito tenendo conto del vincolo che impone di muoversi solo lungo linee orizzontali e verticali.

La metrica del taxista - I

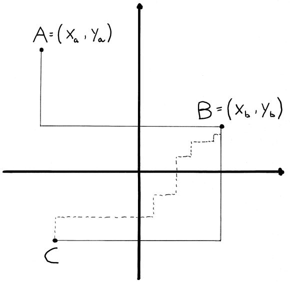


$$d(A,B) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$$

Metrica del Taxista (o ℓ_1)

- Siano A e B due punti del piano;
- la distanza tra A e B (indicata con $d(A,B)$) è data dalla lunghezza del percorso che congiunge A e B, costruito tenendo conto del vincolo che impone di muoversi solo lungo linee orizzontali e verticali.

La metrica del taxista - II

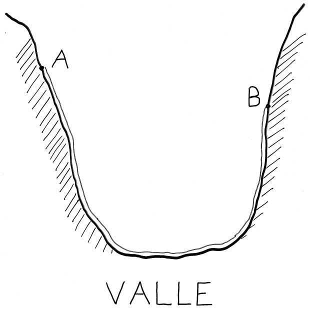


$$d(A,B) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$$

- Si noti come la distanza tra due punti non dipenda dal percorso scelto per calcolarla (purchè il percorso scelto rispetti alcune condizioni ...). Si veda il calcolo di $d(B,C)$.
- La metrica del taxista soddisfa tutte le proprietà richieste dalla nozione astratta di distanza.

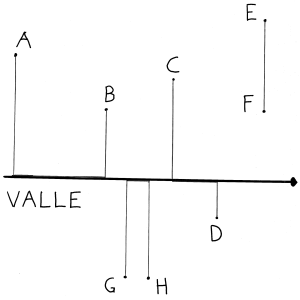
Outline

Due montanari



- Il montanaro che abita in A per andare a trovare il suo amico che vive in B è costretto a scendere a valle e a risalire dall'altro lato. La distanza tra A e B è data dalla lunghezza del percorso.

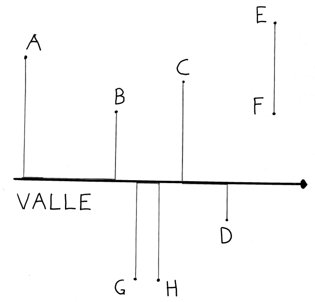
La metrica della valle - I



Metrica della valle

La distanza tra due punti è data dalla lunghezza del percorso che li congiunge, con il vincolo di passare dall'asse orizzontale (fondovalle) tutte le volte che i due punti non sono allineati verticalmente (come invece sono E ed F).

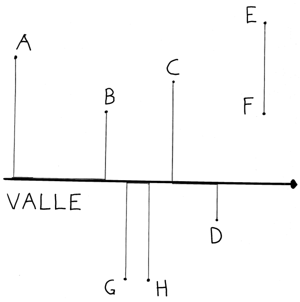
La metrica della valle - I



Metrica della valle

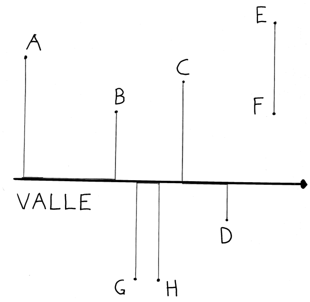
La distanza tra due punti è data dalla lunghezza del percorso che li congiunge, con il vincolo di passare dall'asse orizzontale (fondovalle) tutte le volte che i due punti non sono allineati verticalmente (come invece sono E ed F).

La metrica della valle - II



- Si osservi che anche se i punti G ed H sembrano "vicini" la distanza che li separa non è sensibilmente minore di quella che separa A da B.
- La metrica della valle soddisfa tutte le proprietà richieste dalla nozione astratta di distanza.

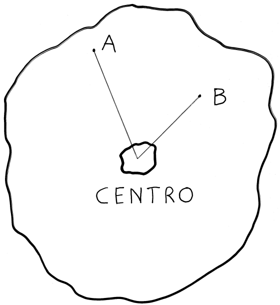
La metrica della valle - II



- Si osservi che anche se i punti G ed H sembrano "vicini" la distanza che li separa non è sensibilmente minore di quella che separa A da B.
- La metrica della valle soddisfa tutte le proprietà richieste dalla nozione astratta di distanza.

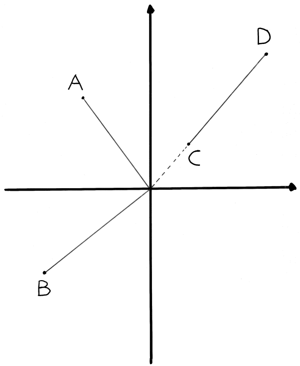
Outline

Tutte le strade passano da Roma



- Per andare dal punto A al punto B siamo costretti a passare da un punto prefissato che chiamiamo centro. La distanza tra A e B è data dalla lunghezza del percorso dato dal segmento che congiunge A con il centro e da quello che congiunge il centro con B.

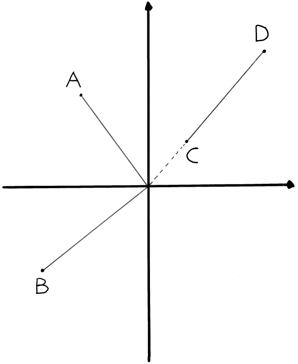
La metrica del centro - I



Metrica del centro

La distanza tra due punti è data dalla lunghezza del percorso che li congiunge, costruito con il vincolo che impone di passare dal centro (tranne nel caso in cui i due punti siano allineati con il centro).

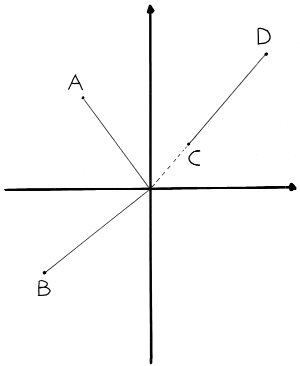
La metrica del centro - I



Metrica del centro

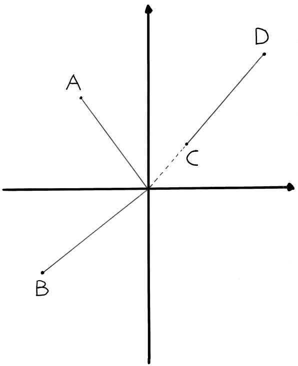
La distanza tra due punti è data dalla lunghezza del percorso che li congiunge, costruito con il vincolo che impone di passare dal centro (tranne nel caso in cui i due punti siano allineati con il centro).

La metrica del centro- II



- Si osservi che i punti C e D sono allineati con il centro, quindi per andare dall'uno all'altro non è necessario passare per il centro;
- La metrica del centro soddisfa tutte le proprietà richieste dalla nozione astratta di distanza.

La metrica del centro- II



- Si osservi che i punti C e D sono allineati con il centro, quindi per andare dall'uno all'altro non è necessario passare per il centro;
- La metrica del centro soddisfa tutte le proprietà richieste dalla nozione astratta di distanza.

Outline

Distanza al di fuori del piano

La definizione astratta parlava di distanza tra elementi di un generico insieme. Vediamo perciò un esempio che non ha a che fare con distanza tra punti del piano, ma che viene dall'informatica.

- I computers lavorano elaborando lunghe sequenze di 0 e 1. Ogni elemento di queste sequenze costituisce quindi un'unità elementare di informazione e si chiama bit.
- Una sequenza di 8 bits costituisce un byte (unità di misura della capacità di memoria dei computers).
- Consideriamo l'insieme di tutti i bytes.
- Vogliamo introdurre una distanza tra due bytes.

Distanza al di fuori del piano

La definizione astratta parlava di distanza tra elementi di un generico insieme. Vediamo perciò un esempio che non ha a che fare con distanza tra punti del piano, ma che viene dall'informatica.

- I computers lavorano elaborando lunghe sequenze di 0 e 1. Ogni elemento di queste sequenze costituisce quindi un'unità elementare di informazione e si chiama bit.
- Una sequenza di 8 bits costituisce un byte (unità di misura della capacità di memoria dei computers).
- Consideriamo l'insieme di tutti i bytes.
- Vogliamo introdurre una distanza tra due bytes.

Distanza al di fuori del piano

La definizione astratta parlava di distanza tra elementi di un generico insieme. Vediamo perciò un esempio che non ha a che fare con distanza tra punti del piano, ma che viene dall'informatica.

- I computers lavorano elaborando lunghe sequenze di 0 e 1. Ogni elemento di queste sequenze costituisce quindi un'unità elementare di informazione e si chiama bit.
- Una sequenza di 8 bits costituisce un byte (unità di misura della capacità di memoria dei computers).
- Consideriamo l'insieme di tutti i bytes.
- Vogliamo introdurre una distanza tra due bytes.

Distanza al di fuori del piano

La definizione astratta parlava di distanza tra elementi di un generico insieme. Vediamo perciò un esempio che non ha a che fare con distanza tra punti del piano, ma che viene dall'informatica.

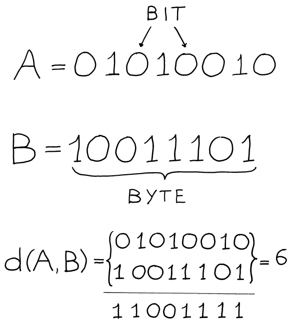
- I computers lavorano elaborando lunghe sequenze di 0 e 1. Ogni elemento di queste sequenze costituisce quindi un'unità elementare di informazione e si chiama bit.
- Una sequenza di 8 bits costituisce un byte (unità di misura della capacità di memoria dei computers).
- Consideriamo l'insieme di tutti i bytes.
- Vogliamo introdurre una distanza tra due bytes.

Distanza al di fuori del piano

La definizione astratta parlava di distanza tra elementi di un generico insieme. Vediamo perciò un esempio che non ha a che fare con distanza tra punti del piano, ma che viene dall'informatica.

- I computers lavorano elaborando lunghe sequenze di 0 e 1. Ogni elemento di queste sequenze costituisce quindi un'unità elementare di informazione e si chiama bit.
- Una sequenza di 8 bits costituisce un byte (unità di misura della capacità di memoria dei computers).
- Consideriamo l'insieme di tutti i bytes.
- Vogliamo introdurre una distanza tra due bytes.

La metrica di Hamming



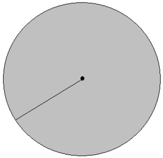
- Dati due bytes A e B la distanza di Hamming è il numero totale di bits diversi.
- La metrica di Hamming soddisfa tutte le proprietà richieste dalla nozione astratta di distanza.

Cambia la distanza cambiano i cerchi... - I

Che cos'è un cerchio?

Fissato un punto nel piano (centro), un cerchio è l'insieme di tutti i punti del piano la cui distanza dal centro è minore o uguale ad un numero positivo detto raggio.

- Si consideri l'usuale distanza euclidea, allora un cerchio è la figura geometrica a tutti familiare.

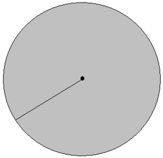


Cambia la distanza cambiano i cerchi... - I

Che cos'è un cerchio?

Fissato un punto nel piano (centro), un cerchio è l'insieme di tutti i punti del piano la cui distanza dal centro è minore o uguale ad un numero positivo detto raggio.

- Si consideri l'usuale distanza euclidea, allora un cerchio è la figura geometrica a tutti familiare.

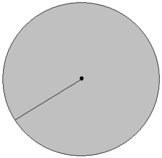


Cambia la distanza cambiano i cerchi... - I

Che cos'è un cerchio?

Fissato un punto nel piano (centro), un cerchio è l'insieme di tutti i punti del piano la cui distanza dal centro è minore o uguale ad un numero positivo detto raggio.

- Si consideri l'usuale distanza euclidea, allora un cerchio è la figura geometrica a tutti familiare.



Cambia la distanza cambiano i cerchi... - II

- Ora consideriamo la distanza del taxista.
- Che cos' è adesso un cerchio?
- E' sempre l'insieme di tutti i punti del piano la cui distanza dal centro è minore o uguale ad un numero positivo detto raggio;
- ma ora la distanza è quella del taxista...., proviamo allora a disegnarne uno...

Cambia la distanza cambiano i cerchi... - II

- Ora consideriamo la distanza del taxista.
- Che cos' è adesso un cerchio?
- E' sempre l'insieme di tutti i punti del piano la cui distanza dal centro è minore o uguale ad un numero positivo detto raggio;
- ma ora la distanza è quella del taxista...., proviamo allora a disegnarne uno...

Cambia la distanza cambiano i cerchi... - II

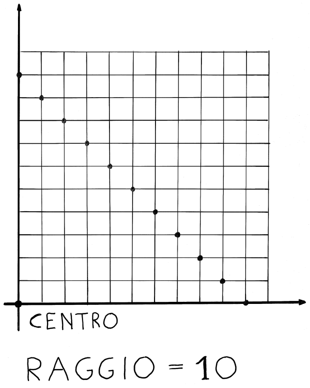
- Ora consideriamo la distanza del taxista.
- Che cos' è adesso un cerchio?
- E' sempre l'insieme di tutti i punti del piano la cui distanza dal centro è minore o uguale ad un numero positivo detto raggio;
- ma ora la distanza è quella del taxista...., proviamo allora a disegnarne uno...

Cambia la distanza cambiano i cerchi... - II

- Ora consideriamo la distanza del taxista.
- Che cos' è adesso un cerchio?
- E' sempre l'insieme di tutti i punti del piano la cui distanza dal centro è minore o uguale ad un numero positivo detto raggio;
- ma ora la distanza è quella del taxista...., proviamo allora a disegnarne uno...

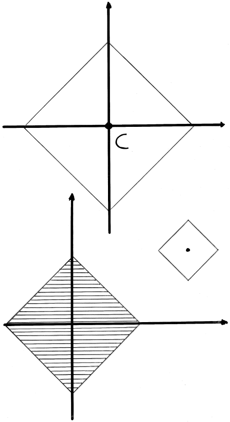
Cerchio nella metrica ℓ_1 - I

I punti segnati sulla quadrettatura distano esattamente 10 isolati dal nostro taxista che si trova nel centro. Naturalmente stiamo ragionando con la metrica del taxista.



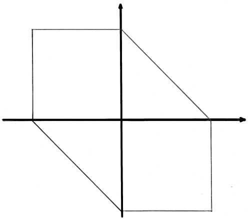
Cerchio nella metrica ℓ_1 - II

Ecco allora un po' di cerchi disegnati con la distanza del taxista....o come direbbe un matematico...tre bolle di raggi diversi nello spazio $\mathbb{R}^2$ con la metrica ℓ_1.



Metriche "esotiche"

- Esistono molte altre metriche.
- Nel disegno accanto è visualizzato una circonferenza rispetto alla metrica esagonale.
- Insomma, quadrati ed esagoni ... sono sempre cerchi (basta cambiare metrica...).



METRICA ESAGONALE

$A=(x_a, y_a)$ $B=(x_b, y_b)$

SE $(x_a - x_b)(y_a - y_b) \geq 0$

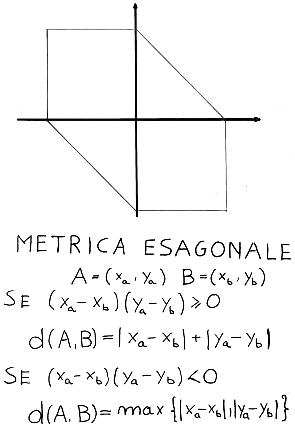
$$d(A,B) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$$

SE $(x_a - x_b)(y_a - y_b) < 0$

$$d(A,B) = \max\{|x_a - x_b|, |y_a - y_b|\}$$

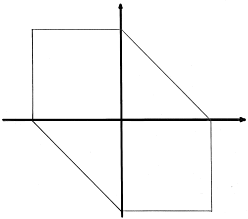
Metriche “esotiche”

- Esistono molte altre metriche.
- Nel disegno accanto è visualizzato una circonferenza rispetto alla metrica esagonale.
- Insomma, quadrati ed esagoni ... sono sempre cerchi (basta cambiare metrica...).



Metriche "esotiche"

- Esistono molte altre metriche.
- Nel disegno accanto è visualizzato una circonferenza rispetto alla metrica esagonale.
- Insomma, quadrati ed esagoni ... sono sempre cerchi (basta cambiare metrica...).



METRICA ESAGONALE

$A=(x_a, y_a) \quad B=(x_b, y_b)$

SE $(x_a - x_b)(y_a - y_b) \geq 0$

$d(A,B) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$

SE $(x_a - x_b)(y_a - y_b) < 0$

$d(A,B) = \max\{|x_a - x_b|, |y_a - y_b|\}$

Caso mai aveste voglia di saperne di più

Che cosa fanno i matematici (raccontato da loro stessi)

- G.H. Hardy; *Apologia di un matematico.* Garzanti (1989 - ristampa 2002);
- S.M. Ulam; *Avventure di un matematico.* Sellerio (1995).

Caso mai aveste voglia di saperne di più

Che cosa fanno i matematici (raccontato da loro stessi)

- G.H. Hardy; *Apologia di un matematico.* Garzanti (1989 - ristampa 2002);
- S.M. Ulam; *Avventure di un matematico.* Sellerio (1995).