UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

DIPARTIMENTO DI ECONOMIA INTERNAZIONALE
DELLE ISTITUZIONI E DELLO SVILUPPO

Carlo Beretta

Appunti su giochi e istituzioni:

2 - Elementi e rappresentazioni di un gioco

N. 1102

VITA E PENSIERO

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

DIPARTIMENTO DI ECONOMIA INTERNAZIONALE
DELLE ISTITUZIONI E DELLO SVILUPPO

Carlo Beretta

Appunti su giochi e istituzioni:

2 - Elementi e rappresentazioni di un gioco

N. 1102

VITA E PENSIERO

Prima di essere pubblicati nella Collana Quaderni del Dipartimento di Economia internazionale, delle istituzioni e dello sviluppo edita da Vita e Pensiero, tutti i saggi sono sottoposti a valutazione di due studiosi scelti prioritariamente tra i membri del Comitato Scientifico composto dagli afferenti al Dipartimento.
I Quaderni del Dipartimento di Economia internazionale, delle istituzioni e dello sviluppo possono essere richiesti alla Segreteria (Tel. 02/7234.3788 - Fax 02/7234.3789 - E-mail: segreteria.diseis@unicatt.it).
www.unicatt.it/dipartimenti/diseis

Università Cattolica del Sacro Cuore, Via Necchi 5 - 20123 Milano

www.vitaepensiero.it

ISBN 978-88-343-2225-3

Abstract

It gives an informal definition of the main elements of a game: the set of players, the concept of a move and of a strategy, the normal and the extended form, a first introduction to the description of information, the set of results that can be reached and the value each player attaches to a result.

JEL. C7 – Games

INDICE

Descrizione di un gioco	p.	7
2.1. L’insieme dei giocatori		8
2.2. Mosse, strategie, forma estesa e forma strategica		10
2.3. Un primo cenno al ruolo dell’informazione		23
2.4. Risultato di un gioco		28
2.5. Il valore delle vincite		31
Riferimenti bibliografici		38

Descrizione di un gioco

Se invece di esaminare un esempio concreto si vuol parlare di giochi in astratto, è necessario individuarne le componenti essenziali, associando a ciascuna un simbolo, specificare di quali caratteristiche e proprietà la si dota così da sapere come usarla, quali operazioni è possibile fare utilizzandola, ed infine fornirla di un'interpretazione generale. Dal nostro punto di vista, un gioco è un insieme di condizioni che gode di determinate proprietà, alcune delle quali, molto poche in realtà, devono sempre essere soddisfatte affinché la situazione sia definibile come gioco, altre gli danno invece individualità, lo differenziano da un altro.

Perché ci sia un gioco, nell'accezione che viene impiegata qui, occorre che ci siano almeno due giocatori, ognuno dei quali può scegliere tra almeno due azioni alternative ed è dotato di obiettivi propri, non necessariamente compatibili con quelli perseguiti dagli altri.

Questa condizione esclude, ad esempio, i solitari, anche se nel linguaggio comune essi sono considerati giochi.

Si consideri il crudelissimo[1] e un po' triste "M'ama, non m'ama" che le fanciulle innamorate sono propense a fare soprattutto a primavera.[2] L'esito dipende dal numero di petali della margherita e dal fatto di cominciare con "M'ama" o con "Non m'ama". Cominciare con l'una o l'altra alternativa dipende dalla fanciulla, quindi c'è un problema di scelta.[3] Il numero di petali[4] è deciso dalla "Natura" o dal "Caso".

Nulla impedisce di considerare la "Natura" o il "Caso" come un secondo giocatore ma, nella visione degli aridi razionalisti che

---

[1] Nei confronti delle tenere margheritine.

[2] D'inverno, oltre che crudele e triste, se è non impossibile per mancanza di materia prima, può essere molto costoso.

[3] Sareste in grado di dire: a) cosa intendete per scelta razionale tra le due alternative; b) se esiste una scelta razionale in materia ed eventualmente qual è; c) se, esistendo una scelta razionale, quella è la scelta che si deve fare, o che comunque voi in particolare fareste?

[4] E, se la fanciulla non bara, almeno nei solitari, sufficientemente grande da non poter esser determinato a colpo d'occhio.

studiano la teoria dei giochi, è un giocatore che non persegue obiettivi propri e, forse proprio per ciò, nulla si sa di come e perché sceglie ciò che sceglie. Mentre le scelte della "Natura" influenzano l'esito delle scelte della fanciulla, le scelte di quest'ultima non hanno alcuna influenza su quelle della "Natura",[5] così che ella può ignorare eventuali effetti di ritorno.[6] Privare la "Natura" di propri obiettivi, magari aggiungendo che le condizioni che determina non sono frutto di deliberazione ma l'opera di meccanismi più o meno deterministici, impedisce che ci sia interazione tra di essa e la fanciulla ed è l'interazione ciò che interessa maggiormente chi studia i giochi.

Ogni gioco è definito dall'insieme di regole che lo caratterizzano.

2.1. L'insieme dei giocatori

Le regole decidono innanzi tutto, come si individua l'insieme dei giocatori. Si indicherà questo insieme con *F*; si indicherà poi con f un generico giocatore o elemento di *F*. Il numero degli elementi di *F*, ad esempio F, viene comunemente detta la cardinalità di *F*, ed è solitamente indicato col simbolo $\# F$. Per quanto si è detto, $\# F \geq 2$. In generale si descrive l'insieme dei giocatori come segue:

---

[5] Si deve concludere che la responsabilità del fatto che il gioco "venga" o "non venga" sono tutte e soltanto della fanciulla, che il risultato è ciò che è voluto dalla fanciulla? Ma in questo caso non sarebbe più sensato dire che la fanciulla si sta chiedendo se vuole che la ami o vuole che non la ami, e allora, perché mutilare un fiore invece di indagare con discrezione il proprio cuore? Sesiete arrivati a questo punto, però, forse non vi siete accorti dell'imbroglio: la fanciulla voleva "il" risultato o solo "un" risultato?

[6] Così facendo, si ammette che la fanciulla possa essere fortunata od avere iella, non che la "natura" sia benigna o matrigna nei suoi confronti. Del resto, si tende a guardare con sospetto e, oltre certi limiti, addirittura come maniaca, chi si sente perseguitata dalla sorte. Ma anche se la sorte fosse bene o male intenzionata nei confronti della fanciulla, questo può non bastare per trasformare il solitario in un gioco minimamente interessante; tutto dipende da quali poteri e capacità vengono attribuite alla "natura". Perché diventi un gioco interessante, occorre che la "natura" non sia troppo potente, non sia in grado di leggere, ad esempio, il cuore della fanciulla.

$F = \{1, ..., f, ..., F\}$.

In alcuni giochi, il numero dei giocatori è rigidamente prefissato. Ad esempio, nella dama, negli scacchi, a pari o dispari, è fissato a due; nello scopone scientifico i giocatori devono essere quattro, divisi però in due coppie. In altri casi, il numero è lasciato indeterminato[7]; si pensi a Monopoli, a nascondino, alla tombola, ecc. Naturalmente, quando si parla di una determinata partita a Monopoli, non si può far a meno di specificare quanti giocatori vi prendono parte.

Nella descrizione di gran parte dei giochi ci si ferma alla *forma-gioco*;[8] di conseguenza, anche quando prevede che si specifichi il numero dei giocatori, non dice chi devono essere i giocatori né pone condizioni sulle loro caratteristiche, in particolare sui loro obiettivi, sui modi in cui li perseguono e su gran parte delle informazioni di cui sono dotati.

In queste situazioni il giocatore, ancor prima di decidere come giocare, deve decidere se giocare ed eventualmente quale gioco e con chi.[9] Si può decidere di giocare a testa e croce, oppure no; se si decide di giocare, occorre però trovare un partner accettabile ed essere accettati come avversari da esso. Vi possono essere dei vincoli, delle condizioni che devono essere soddisfatte per poter partecipare a un gioco; l'elezione del sindaco, almeno quando vi sono più candidati in lizza, rientra tra i giochi nell'accezione qui utilizzata e per votare e per essere eletti occorre soddisfare requisiti di anzianità, capacità giuridica, ecc. In altri casi, i vincoli sono tali da individuare chi deve giocare e non lasciargli altra scelta che giocare: il Presidente

[7] Sempre comunque non inferiore a 2, per le ragioni menzionate.

[8] Grosso modo, tutto ciò che si può dire su un gioco senza fare riferimento all'identità dei giocatori, ai loro obiettivi e al valore che danno ai diversi risultati che possono essere raggiunti. Questo concetto sarà definito in maniera più precisa nel seguito di questo capitolo.

[9] Decidere se giocare un gioco e quale gioco giocare e con chi, sono tutti giochi? E tutti giochi distinti se non separati? Un problema molto importante, come si vedrà più avanti, è come si determina l'insieme dei giochi ammissibili, eventualmente per un giocatore in particolare, e perché alcuni giochi vengono proibiti a tutti i membri della collettività o ad alcuni in particolare.

dell'Autorità Garante della Concorrenza e del Mercato è eletto, stando alla normativa vigente,[10] di concerto dal Presidente del Senato e da quello della Camera; venendo a mancare il Presidente dell'Autorità, per scadenza del mandato, dimissioni o altre cause, i Presidenti dei due rami del Parlamento non solo sono costretti a giocare il gioco loro assegnato, ma devono farlo entro un tempo predeterminato.

Va da sé che, anche se nella descrizione astratta di un gioco non è necessario specificare l'identità dei giocatori che lo effettuano, al momento di giocarlo, essa è spesso un elemento essenziale per decidere se[11] e come giocare.

2.2. Mosse, strategie, forma estesa e forma strategica

Oltre ad indicare come si individua l'insieme dei giocatori, le regole del gioco devono specificare come si determina la *situazione iniziale*.

Nella dama e negli scacchi, ad esempio, specificano come si decide chi deve avere il bianco e chi il nero[12] e come devono essere disposti i vari pezzi sulla scacchiera. Nella scopa, chi deve fare il mazzo, chi deve tagliare le carte, come si distribuiscono le carte; in questo caso, ciascun giocatore sa quali carte ha in mano ma non quali carte hanno gli altri giocatori o quali carte arriveranno a lui o agli altri nel seguito della partita.

In questi esempi, è la natura a fare la prima mossa, a decidere la situazione iniziale, la posizione da cui parte ciascun giocatore. In altri casi, si suppone che sia data esogenamente, come nella descrizione di quasi tutti i giochi menzionati nel capitolo precedente.

Una volta determinata la situazione iniziale, le regole devono specificare se c'è un ordine nel fare le mosse o se tutti devono fare le proprie mosse simultaneamente, ove una *mossa* è un'azione che muta lo stato in cui si trova il gioco.

---

[10] Ma non del tutto accettabile secondo uno dei passati Presidenti delle Camere.

[11] Quando si può farne a meno.

[12] Questa è forse una delle poche situazioni in cui anche due signori seri e compassati giocano ad indovinare cosa sta nel pugno dell'altro.

Si consideri il primo caso. Nel caso degli scacchi o della dama, le regole dicono che il bianco ha la prima mossa e specificano la posizione iniziale dei pezzi e quali mosse il bianco può fare. In maniera simile, nel caso della scopa, decidono chi è il primo a calare una carta. Di fatto, in entrambi gli esempi, le regole non dicono direttamente qual è l'insieme delle mosse che si possono fare, ma quali condizioni devono essere soddisfatte affinché una mossa sia ammessa.[13]

Quando esiste un ordine nell'effettuazione delle mosse, già a questo punto è indispensabile sapere chi viene considerato il giocatore 1, chi il 2, ecc.

Praticamente tutti i giochi di questo tipo, almeno quelli da salotto o da bisca, prevedono che ciascun giocatore debba fare più mosse in successione, alternando quelle dell'uno con quelle degli altri. Le regole devono quindi specificare chi deve fare la seconda mossa, determinare quali mosse può fare dopo che il primo ha fatto la sua e ha cambiato lo stato in cui si trova il gioco, se non altro cambiando le informazioni di cui è dotato chi deve muovere per secondo.[14] Esse devono poi specificare chi deve fare la terza mossa, cosa costui può fare a seconda dello stato raggiunto dal gioco dopo l'effettuazione della prima e della seconda mossa e così via.

Vi sono giochi in cui sarebbe possibile continuare all'infinito a fare mosse; nel poker, se non si mettono regole sui rilanci, si potrebbe continuare da un rilancio all'altro; negli scacchi si potrebbero ripetere successioni finite di mosse che riportano sempre allo stesso stato. In questo capitolo si supporrà però che il *numero massimo di mosse* successive possibili sia finito.[15] In un numero finito di passi, il gioco raggiunge uno stato da cui non sono possibili altre mosse o comunque ha termine. Nella scopa o nella briscola, questo accade quando i giocatori non hanno più alcuna carta in mano; nel poker, quando nessuno dei giocatori può più cambiare carte o effettuare ri-

---

[13] Nel caso degli scacchi, ad esempio, specificano come i singoli pezzi possono essere mossi dalla posizione in cui si trovano, qualunque sia lo stadio raggiunto dalla partita.

[14] Dal momento che questi che può osservare ciò che ha fatto il primo.

[15] Anche se grande a piacere e con il numero di mosse che verranno fatte non necessariamente prefissato.

lanci. Di fatto, anche nei giochi che potrebbero continuare all'infinito, si introducono regole supplementari che troncano il gioco; ad esempio, si stabiliscono limiti alle possibilità di rilancio nel poker o quelle che portano a una patta nel caso degli scacchi.

A seconda dello *stato finale* raggiunto, le regole devono specificare il significato da dare al risultato raggiunto, solitamente chi ha vinto o perso ed eventualmente quanto ha vinto o perso ciascun giocatore.[16] Sull'interpretazione da dare al risultato si dovrà ritornare tra breve.

Questa descrizione del gioco porta alla rappresentazione del medesimo in *forma estesa* attraverso un grafo ad albero[17], esemplificata nella fig. 1.

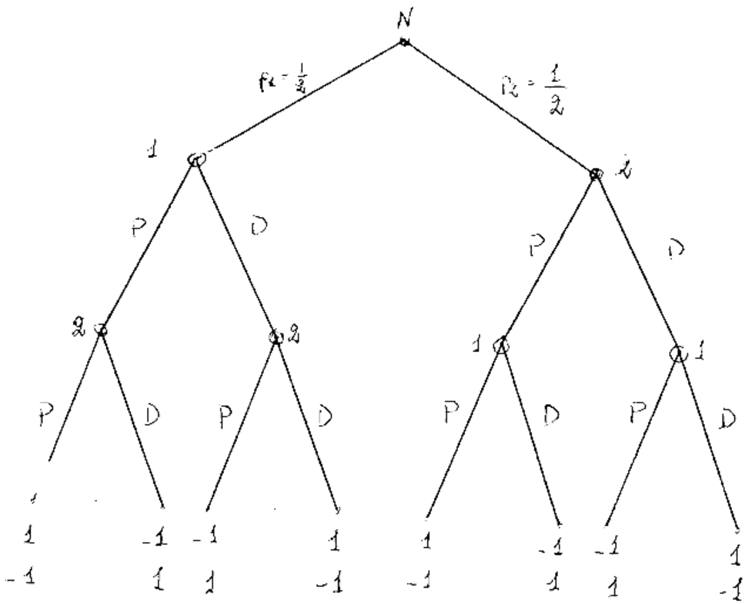

Fig. 1

[16] Nel senso di quanti punti ha fatto, oppure che somma di denaro ha vinto o perso. Questo è diverso dallo specificare cosa vale per un giocatore vincere e quanto vale per lui il denaro che ha vinto o perso.

[17] Tecnicamente, un grafo connesso e senza cicli.

Si parte da un punto o *nodo iniziale*. Spesso, ma non sempre, si prevede che la prima mossa venga fatta dalla "natura" che, in questo caso, decide lo stato iniziale in cui si troverà ciascun giocatore, quale situazione avrà di fronte.[18] Dal nodo iniziale si diramano tanti bracci o *rami* quanti sono i possibili stati iniziali in cui la "natura" può mettere i vari giocatori. Ad ognuno di questi bracci, ossia, ad ogni possibile mossa della natura, si associa la probabilità che viene attribuita alla sua adozione.[19]

Nelle versioni più semplici, questo è l'unico stadio in cui interviene questo giocatore anomalo.[20] Dopo di che, effettuano mosse solo i giocatori specificati in *F*.

Una volta determinato lo stato iniziale in cui si trova ciascun giocatore, il punto o nodo raggiunto per intervento della "natura", le regole del gioco specificano a chi spetta muovere e quali mosse può fare. Ad ognuno dei nodi raggiunti per effetto dell'intervento della "natura" si associano tanti bracci quante sono le mosse che il giocatore che muove per primo può fare, dato lo stato in cui si trova.[21]

Ogni mossa fatta in questo stadio porta ad un nuovo nodo. L'insieme dei nodi raggiungibili contiene tanti elementi quante sono le mosse alternative possibili nello stadio precedente. Da ognuno di questi nodi si dipartono tanti bracci quante sono le mosse possibili per il giocatore 2. Ovviamente, le mosse possibili per il giocatore che sceglie a questo stadio possono variare a seconda di quale nodo sia stato raggiunto nel precedente. Si procede poi allo stesso modo di stadio in stadio fino al termine del gioco.

Se un giocatore in ciascuno stadio conosce e ricorda tutte le mosse che sono state fatte in precedenza, si dice che è dotato di *me-*

---

[18] Nel caso degli scacchi, decide chi avrà il bianco e chi il nero; a scopa, quali carte finiranno a ciascun giocatore, sempre che non ci sia qualcuno che bara.

[19] Nel caso degli scacchi, ad esempio, si dà probabilità ½ al fatto che f' abbia il bianco ed f" il nero e probabilità ½ al fatto che f' abbia il nero e f" il bianco.

[20] Per un esempio di gioco in cui la "natura" interviene ripetutamente, considerate il Monopoli.

[21] Nel caso degli scacchi, tutte le mosse di apertura che il bianco può fare.

moria o ricordo perfetto.[22] Se un giocatore può osservare qual è lo stato raggiunto dal gioco al momento in cui deve decidere la propria mossa, ossia sa sempre in corrispondenza a quale nodo si trova e quali mosse può fare, si dice che è dotato di *informazione perfetta*.[23] Si ha perciò *informazione imperfetta* se, a qualche stadio del gioco, non si sa in corrispondenza a quale nodo, eventualmente tra quelli appartenenti a un particolare insieme, ci si trova, o, in altre parole, non si conosce quale mossa, tra quelle possibili per lui, è stata effettuata dal giocatore che doveva scegliere nello stato precedente.

È importante distinguere tra informazione incompleta ed informazione imperfetta. In un gioco a *informazione incompleta* non si conosce qualcuno degli elementi essenziali del gioco, l'insieme dei giocatori, la successione dei nodi ossia l'ordine nel quale ciascun giocatore è chiamato a decidere, quali mosse gli sono possibili in corrispondenza a ciascuno dei nodi e, infine, i guadagni e le perdite di ciascun giocatore a seconda di quale stato viene raggiunto al termine del gioco. L'informazione imperfetta richiede solo che non si conosca in corrispondenza a quale nodo ci si trova a decidere. È perciò possibile avere un gioco ad informazione completa ma imperfetta.[24]

---

[22] Per la definizione di mossa, strategia, forma estesa e forma strategica si rinvia al Cap. 1 di Binmore (1992). Per una descrizione analitica più precisa ed ulteriori illustrazione di tutti i concetti usati in questo paragrafo, si vedano i capitoli rilevanti di MasColell - Whinston - Green (1995), oppure Kreps (1990) o anche Osborne – Rubinstein (1994).

[23] Si noti che si può avere informazione perfetta anche senza avere ricordo perfetto, ma forse un buon giocatore di scacchi ha sia informazione, sia ricordo perfetti.

[24] Se valgono condizioni particolari, può essere possibile trasformare un gioco ad informazione incompleta in un gioco ad informazione imperfetta. Questo è quello che accade, ad esempio, quando non si conosce la matrice dei pagamenti, perché questa varia da un tipo all'altro di giocatore. Se ciascun giocatore conosce il proprio tipo ma non il tipo degli altri e tutti i giocatori sanno che il tipo di ciascuno è deciso da un meccanismo casuale di cui si conosce la distribuzione e questa distribuzione è conoscenza comune, si allarga il gioco introducendo una fase iniziale in cui la natura sceglie, secondo la distribuzione di probabilità prefissata, il tipo di ciascun giocatore. Questa è la procedura suggerita da Harsanyi (1967-8).

Nella fig. 1 si descrive un gioco a informazione perfetta. Si tratta del gioco pari e dispari, in cui il giocatore 1 vince 1 euro se la somma delle dita mostrate è pari e paga 1 euro se dispari, e ovviamente l'opposto accade al giocatore 2. Nell'istante iniziale la natura decide chi farà la prima mossa. Una volta che il giocatore così individuato rivela la propria scelta, il giocatore 2 muove a propria volta. Vincite e perdite sono poi indicate nelle righe finali. Giocato in questa maniera è ovvio che la natura decide chi vincerà e chi perderà, dal momento che l'ultimo giocatore a muovere ha sempre una strategia vincente.

Nel caso in cui la natura decida che tocca al giocatore 1 muovere per primo, la sua scelta è solo se giocare pari o dispari; quello che fa dopo che 2 ha mosso è irrilevante per gli esiti del gioco. Il giocatore 2 ha quattro strategie: le prime due dicono che, ovviamente, deciderà di giocare dispari se 1 ha scelto pari e pari se 1 ha scelto dispari, ma ha anche altre due strategie, che per ovvie ragioni non userà, che sono quelle di giocare pari se 1 ha giocato pari e dispari se 1 ha giocato dispari.

In una partita a dama o a scacchi, si osserva se è stato mosso l'alfiere o il cavallo da che posizione a che posizione, si decide quale dei propri pezzi muovere ma si dice che il giocatore bravo si distingua dalla schiappa per il numero di mosse future che ha pianificato di fare. Questo significa che, nel decidere quale pezzo muovere allo stadio t, farà previsioni sulle possibili mosse dell'avversario allo stadio t + 1 e, a seconda di quali di queste mosse l'avversario farà, programmerà anche la mossa che farà nello stadio t + 2, quando sarà di nuovo il suo turno muovere; il piano tien dunque conto delle possibili mosse dell'avversario e prevede mosse diverse nel periodo t + 2 a seconda di quali mosse l'altro farà nel periodo t + 1. Quel che importa, nel caso degli scacchi, non è tanto la singola mossa osservata, ma la successione di mosse programmata.

Idealmente, il bianco, ad esempio, deve decidere la propria mossa di apertura, ma deve pensare anche a ogni possibile prima mossa dell'avversario; per ognuna delle possibili mosse dell'avversario, deve decidere quale sarà la sua seconda mossa, ma in realtà avrebbe già dovuto pensare, al momento della prima mossa, per ognuna delle proprie prime mosse possibili e per ogni possibile prima mossa dell'altro associata a ciascuna prima mossa, quale sarebbe stata la propria seconda mossa; la stessa cosa avrebbe dovuto fare il nero nel decidere sia la propria prima che seconda mossa. Ma già nel fare la prima avrebbero dovuto aver in mente anche il terzo stadio e così via sino alla fine.

È ovvio che questo è praticamente impossibile negli scacchi o nella dama. Ma è quello che teoricamente si dovrebbe, e comunque è quello che si desidererebbe[25] essere in grado di fare. In giochi più semplici però tutto questo è sia teoricamente che praticamente possibile.

L'insieme di mosse che f ha programmato di fare dall'inizio alla fine del gioco, ciascuna mossa condizionata a ciò che sa sulla situazione raggiunta dal gioco, quindi all'insieme delle mosse, proprie e dell'avversario, fatte in precedenza, e magari motivata dalle conseguenze che avrà sulle possibilità di scelta e sulle scelte effettive dell'altro o degli altri giocatori, viene detta una *strategia* del giocatore f.

Decidere una strategia è perciò decidere quale sarà il proprio comportamento in ognuna delle situazioni che potrebbero essere raggiunte nello svolgimento del gioco, ovviamente nel rispetto delle regole di base, ma senza escluderne alcuna. Man mano che il gioco va avanti,[26] alcune delle situazioni inizialmente considerate diventeranno irraggiungibili.[27] In generale, vi saranno situazioni in cui si ritiene che fare una certa mossa sia "sbagliato"[28] e dunque che nessuno farà quella mossa, che pure è ammessa dalle regole del

---

[25] Non è chiaro che si voglia effettivamente che il desiderio sia soddisfatto. Se è vero quel che si dirà più avanti, forse si arriverà ad un tempo in cui ciascun giocatore potrà decidere l'intera strategia che adotterà per tutto il gioco, ancor prima di sapere se avrà il bianco o il nero ma, se mai si arriverà a quel giorno, e certamente se tutti sapranno che quel giorno è arrivato, da quel momento si smetterà di giocare a scacchi.

[26] Ad esempio, man mano che si eliminano dei pezzi o, più in generale, man mano che si fanno delle scelte irreversibili.

[27] Anzi, come si vedrà tra poco, sapendo che alcune delle situazioni considerate non potranno mai essere raggiunte, anche se non si è in grado di dire *ex ante* quali potranno e quali non potranno mai essere raggiunte.

[28] Ovviamente, qui "sbagliato" sta a significare che non è razionale, ma come si vedrà, dire cosa è razionale nel contesto della teoria dei giochi è piuttosto complicato.

gioco. Soprattutto alla luce di questo fatto, sembrerebbe sensato "potare" l'albero che descrive il gioco, eliminando tutti i rami[29] che prevedono una di queste mosse. Anche se questo consentirebbe di semplificare l'analisi, come si vedrà, questa è una decisione azzardata; in particolare, impone un'adesione a un particolare tipo di razionalità, la razionalità sostanziale, che è difficile sostenere razionalmente in molte situazioni. Per questo motivo, si chiederà che ciascun giocatore consideri anche la possibilità di fare una mossa di questo tipo e decida come comportarsi se essa, nonostante tutto, venisse fatta da qualcun altro.

Se, come si è implicitamente supposto nell'esempio, ad ogni nodo il giocatore f decide in maniera univoca la mossa che farà, si dice che f adotta una *strategia pura*. In molte situazioni può essere conveniente per f eliminare alcune mosse possibili ma lasciarne almeno due e affidare la scelta tra di esse ad un meccanismo stocastico, possibilmente scegliendo la probabilità con cui il meccanismo indica una mossa o l'altra.[30] In questo caso si dice che f adotta una *strategia mista*.[31]

Se ci si limita alle strategie pure, una volta determinata la strategia scelta da ciascun giocatore, anche il risultato o lo stato finale raggiunto dal gioco è univocamente determinato. Nel caso di strategie miste, si determina una distribuzione di probabilità sull'insieme dei risultati.

Data l'esistenza di almeno due alternative per ciascun giocatore, ciascuno deve scegliere tra più strategie. Se si vede il problema di un giocatore come un problema di scelta, il primo passo da fare per definire e poi risolvere questo problema sembrerebbe dunque quello di costruire l'*insieme delle strategie*, dal momento questo è l'insieme delle alternative tra cui può scegliere. Se si parte dalla forma estesa, costruire questo insieme è concettualmente molto sempli-

---

[29] Ossia tutta la successione di nodi che seguono una mossa "sbagliata".

[30] Naturalmente un meccanismo stocastico non degenere, che assegni una probabilità strettamente positiva ad almeno due mosse, in modo che la somma delle probabilità sia pari ad 1.

[31] Per una miglior definizione di questi concetti si rinvia a Binmore (1992).

ce[32] ma, come si vedrà più avanti, la tecnica di soluzione che si usa di solito in questi casi è diversa.

Fino ad ora si sono considerati giochi in cui i giocatori muovono in successione e ciascuno può osservare le mosse fatte dagli altri in precedenza. Nell'esempio del pari o dispari, le regole precisano invece che entrambi i giocatori mostrino le dita simultaneamente. In effetti, quello che realmente si vuole, però, è che, nel momento in cui realizza la propria decisione, ciascun giocatore non sappia quale decisione ha messo in atto l'altro.[33] Chiedere che la realizzazione delle scelte sia contemporanea è una delle maniere, forse la più semplice, per ottenere questo risultato.[34]

Anche un gioco a mosse simultanee può essere rappresentato con un grafo ad albero.[35] La fig. 2, ad esempio, illustra il gioco del pari e dispari nel modo in cui viene solitamente giocato. Come si noterà, i nodi associati al "secondo" stadio sono tutti raggruppati nello stesso insieme tratteggiato. Questo sta ad indicare che al momento di muovere, il giocatore 2 non sa quale sia stata la scelta effettuata dal giocatore 1; tutto quello che sa è che 1 ha fatto una delle mosse ammissibili. A differenza dei giochi a informazione perfetta, come quello degli scacchi,[36] in cui i giocatori sanno sempre in corrispondenza a quale nodo si trovano, in questi giochi, detti appunto ad *informa-*

---

[32] Concettualmente, ma dal punto di vista pratico spesso irrealizzabile, come si è detto per gli scacchi.

[33] Non è perciò tanto importante che mostrino il numero di dita prescelto nello stesso momento; non cambierebbe nulla se si chiedesse ai due giocatori di mostrare, prima l'uno poi l'altro, il numero di dita prescelto ad un terzo, senza che i due giocatori possano venire a sapere ciascuno delle scelte dell'altro, col terzo che poi comunica loro le scelte di ciascuno e quindi chi ha vinto.

[34] Ma si rammenterà quante volte si sia litigato perché l'altro aveva aspettato a mostrare le proprie dita ben oltre il fatidico "Tre!".

[35] Formulate questo gioco non solo in forma estesa, ma come un gioco a mosse in successione, invece che simultanee. Vedete perché un gioco a mosse successive tra due giocatori ciascuno dei quali muove una sola volta è solitamente poco interessante? Di fatto, il gioco in esame in realtà finisce nel momento in cui si decide chi deve muovere per primo e chi deve muovere per secondo.

[36] Ma, anche qui, solo dopo che si sa già chi è il bianco e chi il nero.

zione imperfetta, il giocatore sa solo che il nodo in corrispondenza a cui si trova appartiene a un certo insieme, che contiene però più di un elemento.

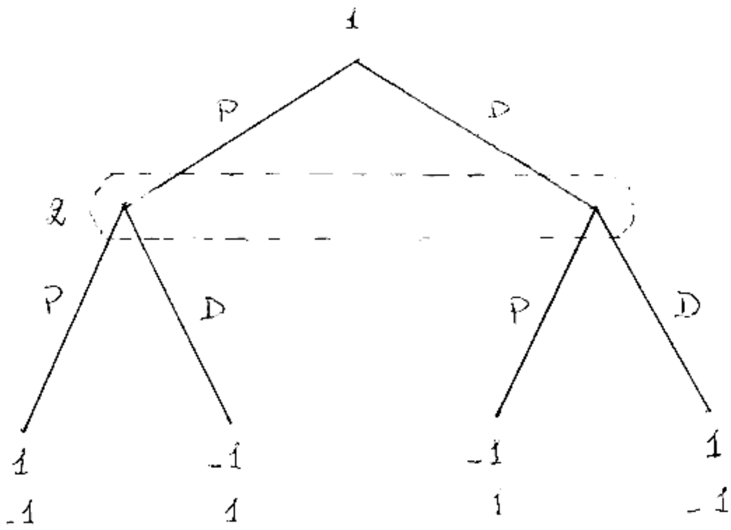

Fig. 2

In un gioco come quello del pari o dispari, più in generale in ogni gioco a informazione imperfetta ad un solo stadio, in cui ciascun giocatore deve fare una sola mossa senza sapere quale mossa abbia fatto l'altro, non è importante chi si indica come giocatore 1, ossia chi si associa al nodo iniziale. Nella fig. 2, ad esempio, al momento di decidere quale mossa fare, il giocatore 1 sa che il giocatore 2 non saprà in corrispondenza a quale nodo si troverà a muovere, non saprà quale mossa 1 abbia eventualmente già deciso di fare. Ma questo vuol dire che 1 sa solo che 2 farà una qualunque delle mosse possibili per 2, proprio come 1 sa solo che 2 farà una qualunque delle mosse che sono possibili per 2. Dopo che tutti e due hanno effettuato la propria mossa, tutti e due vengono informati su quali mosse sono state effettuate, e quindi sullo stato raggiunto dal gioco.

Come nei giochi a mosse successive, il gioco può prevedere una successione di stadi, una successione di mosse simultanee. Molti degli esempi tratti dall'economia e dalla politica hanno questa caratteristica, di fatto sono descrivibili come una successione di mosse simultanee.[37]

Anche per questi giochi, le regole devono specificare come si determina la situazione iniziale in cui ciascun giocatore viene a trovarsi e quando ciascuno dei giocatori è chiamato ad effettuare le proprie mosse. Ma se, al momento di scegliere la propria mossa, 2 non sa quale mossa ha simultaneamente fatto 1, non la può condizionare a quella effettuata dall'altro; di conseguenza, considererà ammissibile ogni mossa ammissibile per un qualunque stato raggiungibile attraverso una qualsiasi mossa fatta dall'altro. In altri termini, ad ogni nodo appartenente ad uno stesso insieme tratteggiato deve essere associato lo stesso insieme di bracci. Naturalmente, questo richiede che il gioco sia definito in maniera tale da determinare quali effetti produce, a quali risultati porta, l'effettuazione di una mossa qualsiasi tra quelle possibili da parte del giocatore 1 e di una mossa qualsiasi, sempre tra quelle possibili, da parte del giocatore 2.

Quel che è forse più importante è che ciascun giocatore deve decidere come comportarsi anche nell'eventualità che l'altro abbia effettuato una mossa che rende ogni sua scelta del tutto ininfluente o irrilevante[38] e, come nel caso di mosse in successione, non può escludere neppure mosse "sbagliate",[39] sia proprie, sia degli altri.

Le regole devono infine specificare quando e come il gioco stesso termina e qual è il risultato ottenuto da ciascun giocatore a seconda dello stato finale raggiunto.

---

[37] Addirittura un successione non necessariamente finita. Questo implica estendere l'analisi a giochi con insieme infinito di strategie. L'analisi è spesso possibile solo per situazioni particolari, caratterizzati da una struttura, come quella dei giochi ripetuti, che consente di preservare molta della semplicità dei giochi finiti.

[38] Nel caso degli scacchi, ad esempio, almeno teoricamente ciascun giocatore dovrebbe decidere quale sarà la sua prima mossa prima ancora di sapere se ha il bianco o il nero. Ovviamente sa che o avrà il bianco e non avrà il nero o avrà il nero e non avrà il bianco; quindi sa che sta prendendo decisioni su cosa farebbe anche in situazioni che non si avvereranno mai.

[39] Nel senso di mosse che rispettano le regole del gioco ma appaiono del tutto irrazionali, controproducenti per chi le adotta.

Nel pari o dispari si decide una volta sola se mostrare un numero di dita pari o dispari e una volta che i due hanno mostrato il numero di dita prescelto la partita o almeno la mano, se si gioca ripetutamente, finisce. Anche quando la scelta si riduce a cosa fare in una sola mossa, si dice che il giocatore deve scegliere una strategia.

Un volta definito cosa si intende per strategia ed insieme delle strategie disponibili per ciascun giocatore, la rappresentazione in *forma strategica* diventa immediata. Nel caso di sue soli giocatori, ad esempio, consente di sostituire al grafo ad albero che descrive la forma estesa la matrice già utilizzata nel cap. 1 per sintetizzare ciò che accade nel gioco.

La forma strategica mette in evidenza cosa accadrebbe se ciascun giocatore scegliesse una strategia pura nell'insieme delle strategie ammissibili per lui. Ciascuno effettua la propria scelta all'inizio del gioco, ancor prima che una qualsiasi mossa venga effettuata; in quel momento, nessun giocatore sa quale strategia l'altro abbia deciso di adottare. La forma strategica descrive perciò ogni gioco, compresi quelli con mosse in successione, come un gioco a mosse simultanee.

In questa rappresentazione, ad ogni giocatore f si associa perciò un insieme di strategie pure che verrà indicato con A_f avente come generico elemento a_f. Nelle ipotesi fatte, in particolare quella che assicura che il numero di stadi ed il numero di mosse possibili in ogni stadio sono finiti, A_f deve essere un insieme finito, anche se può essere molto grande.

Si indicherà con a un vettore di strategie, vale a dire un insieme ordinato che associa a ciascun agente f una strategia a_f. Con la simbologia adottata,

$$a = \{a_1, ..., a_f, ..., a_F\}.$$

Naturalmente si è interessati solo a quei vettori di strategie, a quegli a, che sono caratterizzati dal fatto che $a_f \in A_f$ per ogni f. Allora a indica sinteticamente come ciascun agente ha deciso di comportarsi in ciascuno dei momenti in cui fosse chiamato a fare una mossa ed in corrispondenza ad ogni eventualità che si potrebbe verificare durante il gioco, comprese quelle che non possono essere raggiunte se valgono le ipotesi che il giocatore formula sugli altri.[40]

Come si vedrà, sarà necessario estendere le scelte di f permettendogli di adottare anche strategie miste, formalmente, delle combinazioni lineari convesse di strategie e le cose dovranno essere interpretate diversamente ma, se ci si vincola alle sole strategie pure, determinare a vuol dire determinare come il gioco sarà giocato da ciascuno dei giocatori, e di conseguenza il risultato del gioco stesso.

Nella versione che qui si sta studiando, a è però il risultato della scelta della strategia da mettere in atto effettuata da ciascun agente in modo autonomo ed indipendente da ogni altro. Il criterio di scelta di f, ed il giudizio su questa scelta, deve tener conto degli effetti dell'uso della strategia in questione in termini di realizzazione della sua funzione obiettivo. I problemi nascono dal fatto che f non è in grado da solo di decidere, attraverso la propria scelta, quale risultato verrà raggiunto, ma che questo risultato dipende da quali scelte faranno gli altri giocatori. E nel momento di decidere, quando sceglie la propria strategia, f' non sa quale strategia abbia deciso di adottare f'' e viceversa.

Facendo variare i vari a_f in A_f, si passa da un a ad un altro, da un modo di giocare il gioco ad un altro e di conseguenza, normalmente, da un risultato ad un altro. Si indichi con A l'insieme di tutte le combinazioni di strategie possibili dei vari agenti, un insieme che ha a come elemento generico. A indica allora tutti i modi in cui il gioco può essere giocato. Per costruzione, $A = \Pi_f \; A_f$, ove Π_f sta per l'operazione di prodotto cartesiano[41] dei vari insieme A_f.

---

[40] Ci si riferisce, in particolare, all'ipotesi di razionalità che verrà introdotta più avanti.

[41] Dal nostro punto di vista, l'insieme di tutti i vettori costruibili scegliendo ciascuna componente in modo che a_f stia in A_f per ogni f. Per fare un esempio, se si guarda il piano cartesiano solitamente impiegato nelle rappresentazioni grafiche, questo può essere visto come il prodotto cartesiano dell'insieme dei numeri reali, R, con se stesso e viene scritto come R × R, o anche come R^2: un elemento di questo prodotto cartesiano è una coppia ordinata di numeri reali, quindi il primo elemento è scelto in R ed il secondo elemento è scelto pure esso in R; graficamente questi numeri vengono interpretati come coordinate da leggersi ciascuna sul rispettivo asse; facendo variare questi numeri si ottengono tutti i punti del piano cartesiano; d'altra parte,

A differenza della forma estesa, la forma strategica richiede esplicitamente che si parta dalla costruzione dell'insieme delle strategie tra cui ciascun giocatore può scegliere. Per alcuni giochi questo è banale: si pensi al gioco del pari o dispari. Ma in altri lo è assai meno: si pensi agli scacchi.[42]

2.3. Un primo cenno al ruolo dell'informazione

Si può supporre che il giocatore conosca tutte le regole del gioco, e quindi sappia chi, e quando, deve muovere, quali mosse si possono fare in ciascuno stadio del gioco a seconda della situazione che si è eventualmente venuta a creare; in questo modo, è, almeno teoricamente, in grado di costruire l'insieme di tutte le potenziali situazioni raggiungibili, che è quello che gli serve per decidere la propria strategia, come comportarsi in ciascuna situazione in cui potrebbe essere chiamato a muovere, comprese quelle che non solo potrebbero non essere mai raggiunte, ma anche quelle che si ha ragione di ritenere che non verranno mai raggiunte.

---

ogni punto è caratterizzato da una coppia di coordinate, e ciascuna coordinata è un numero reale. Si stabilisce così una relazione biunivoca tra l'insieme dei punti del piano cartesiano e l'insieme degli elementi del prodotto cartesiano. Naturalmente, per ottenere tutto ciò che caratterizza il piano cartesiano, occorre dotare l'insieme R^2 di molta più struttura, ad esempio, occorre essere in grado di definire distanze, operazioni effettuabili sugli elementi, e così via.

[42] Eppure si dimostra che in entrambi i casi almeno una delle parti ha almeno una strategia che dovrebbe scegliere, non si sa se per vincere o per assicurarsi la patta. Se siete giocatori sofisticati, vedreste la possibilità di "patta", almeno *ex ante*, anche nel caso di pari o dispari, purché possiate estendere la scelta alle strategie miste. Anche nel caso degli scacchi è possibile dimostrare che una strategia ottimale esiste per almeno uno dei due giocatori ma, non solo non la si conosce, non si sa neppure per quale dei due esista e se assicura una vittoria o una patta. La possibilità di patta è importante: esistono giochi potenzialmente infiniti, che finiscono solo se uno dei due giocatori "sbaglia". L'esempio solito è tris (tic-tac-toe) giocato con pedine mobili sul disegno solitamente riprodotto sul retro della scacchiera per la dama o per gli scacchi.

Quando si ha a che fare con i tipici giochi da salotto, supporre la conoscenza delle regole non sembra un condizione troppo restrittiva. Però, già passare da questa alla conoscenza di tutte le strategie ammissibili può richiedere un passo molto lungo.[43] E forse più lungo del necessario.

Nel costruire l'insieme delle situazioni potenzialmente raggiungibili, ciascun giocatore deve usare ciò che sa su quello che gli altri sanno. Ad esempio, conoscendo le regole, sa che, se queste vengono fatte rispettare, non si può raggiungere nessuna situazione che non sia compatibile con esse; ma qualche altro giocatore può non conoscere bene le regole, può ritenere vietata una mossa che non lo è;[44]

---

[43] Vi sono problemi molto interessanti che si dovranno trascurare ma su cui vale la pena di soffermarsi nei momenti di ozio. Quando si gioca a scacchi, normalmente entrambi i giocatori conoscono le regole del gioco. Di conseguenza ciascuno dovrebbe essere in grado di vedere tutte le mosse che per lui è possibile fare e che l'avversario può fare. Ma a chi scrive capita spesso di essere "sorpreso" dalle mosse dell'avversario. L'espressione è volutamente ambigua: i giocatori abili sono spesso sorpresi dall'ingenuità, in senso spregiativo, dell'avversario; a me, purtroppo, capita sempre di essere dall'altra parte, e di vedere cose che non mi sarei aspettato, mosse a cui non avevo pensato. Come è possibile la "sorpresa" in questi casi? A cosa è dovuta? Se conoscere le regole del gioco vuol dire essere in grado di conoscere tutte le possibili mosse, come può accadere che una mossa che si sa possibile sorprenda? Naturalmente, le capacità di calcolo del proprio cervello, e soprattutto i loro limiti, sono importanti. Questo può spiegare perché, in un campo in cui potenzialmente si conosce tutto, di fatto si considera solo una parte delle possibilità. Ma resta da vedere perché le proprie limitate capacità si usano in una direzione piuttosto che in un'altra. Certamente alcune alternative vengono trascurate perché giudicate irrilevanti, ma come si procede a questa scelta? Perché si vedono alcune mosse e non se ne vedono altre? Cos'è la fantasia, la creatività, l'immaginazione in questi settori? E perché la si usa in una maniera piuttosto che in un'altra? Come si vedrà, il ruolo di molte delle ipotesi che si introdurranno è, sfortunatamente, quello di eliminare questi problemi.

[44] Si noti come, a questo stadio, l'ignoranza che porta l'altro giocatore e ritenere possibili mosse che non lo sono è irrilevante. Ovviamente una simile ignoranza può indurre un giocatore ad adottare una strategia che non potrà mettere in atto da un certo punto in poi, quando però ha già effettuato delle scelte irreversibili. Essa può perciò diventare rilevante per gli altri giocatori

sapere che un altro non farà mai una certa mossa perché la pensa vietata restringe l'insieme delle alternative che si debbono tenere presenti.

Avere più informazione, in questo caso conoscere i limiti dell'informazione dell'altro, limita le necessità di calcolo e di capacità logica. Ma l'informazione pone molti più problemi. Si supponga che un giocatore creda che l'altro non conosca bene le regole del gioco, ad esempio ritenga proibita una mossa che non lo è. Egli sa di non poter impiegare quella mossa fino a quando il fatto che l'altro la ritenga proibita gli è utile. E se 1 crede che 2 creda che 1 ritenga proibita una mossa che invece sa essere lecita, anche 1 dovrà astenersi dall'usarla fino a quando non sia più opportuno per lui "sorprendere" 2 con una mossa inaspettata. Limitare le informazioni dell'altro, in questo caso, pone vincoli sulle strategie che si possono usare. Questo pone subito un problema relativo al calcolo dei vantaggi che si ottengono dai limiti delle informazioni altrui e dai costi eventuali di preservare questi limiti.

Nel caso degli scacchi si è costretti ad esempi piuttosto artificiosi. Il problema essenziale, in questo caso, sembra legato al costo e ai limiti delle capacità di calcolo. Anche se sarebbe teoricamente possibile pensare a tutti i modi in cui può essere giocata una partita a scacchi, è solo quando il gioco ha raggiunto un certo stadio, ad esempio dopo che è stato eliminato un certo numero di pezzi e la disposizione, e quindi gli ulteriori movimenti possibili, di quelli residui sulla scacchiera è sufficientemente definita che due bravi giocatori possono raggiungere un accordo su chi di loro è in vantaggio, eventualmente chi ha vinto o perso, senza bisogno di continuare fino alla fine.

Ma si pensi allo scopone scientifico o al poker. I giocatori, anche conoscendo tutte le regole del gioco e sapendo che gli altri sanno che tutti sanno le regole del gioco, dispongono di informazioni diverse: sanno quali carte hanno in mano ma non quelle degli altri giocatori. Si può desiderare di trasmettere informazioni sulle proprie carte al compagno, senza però rivelarle agli avversari e ottenere informazioni sulle carte altrui. Il fatto che ciascuno cerchi informazioni

---

in un contesto diverso, al momento di decidere quale tra le strategie ammissibili adottare.

sulle carte altrui e basi le proprie decisioni su di queste può indurre a cercare di manipolarli “rivelando” informazioni non necessariamente veritiere. A carte, lo strumento attraverso cui si “comunica” con gli altri è solitamente[45] il comportamento che si tiene, quali carte si giocano o in che condizioni si rilancia. Tutti sanno che tutti sanno che il comportamento tenuto da un giocatore rivela qualcosa, che ci si può comportare in un certo modo solo per indurre gli altri a credere vera una certa informazione. In queste condizioni, si è in grado di trasmettere informazioni credibili?[46] Si è in grado di distinguere informazioni corrette da quelle false?

La descrizione dello stato in cui si trova il gioco e delle sue possibili evoluzioni e di ciò che si pensa che ciascun giocatore sappia del gioco e degli altri giocatori è l'*informazione*[47] di cui un giocatore è dotato. Come si vedrà più avanti, per utilizzare il comportamento di un altro come fonte o mezzo di trasmissione dell’informazione occorre essere informati o fare ipotesi anche sull’informazione da lui posseduta, sul tipo di razionalità[48] dell’avversario, sull’informazione e la razionalità che l’avversario ci attribuisce, e sul valore che il giocatore e l’avversario danno ai vari esiti possibili del gioco.

È soprattutto sul ruolo e sul come viene trattata l’informazione che forma strategica e forma estesa differiscono maggiormente. L’esistenza di informazione limitata e anche asimmetrica,[49] da un punto di vista astratto, può essere catturata da entrambe le forme, anche se questo richiede di passare esplicitamente alla trattazione dei giochi ad informazione incompleta.[50]

---

[45] Ma i frequentatori di bische clandestine probabilmente ne conoscono altri.
[46] Credibili, ma non necessariamente vere.
[47] La descrizione formale di cosa si intende per informazione, come si descrivono stati di informazione o di conoscenza diversa è una delle cose più affascinanti elaborate nell'ambito della teoria dei giochi. Su questi punti si veda, oltre a Binmore (1992), Osborne - Rubinstein (1994) e la letteratura ivi citata. Sugli effetti dell’informazione di un giocatore circa l’informazione posseduta da un altro ed in particolare sull’ipotesi di conoscenza comune e sul suo ruolo, si veda Geanakoplos (1992)
[48] Questo è un punto particolarmente delicato su cui si dovrà ritornare più volte.
[49] Vale a dire, che differisce da un giocatore all’altro.
[50] Si noti, incompleta, non necessariamente imperfetta.

Nella forma strategica, però, si suppone che tutta l'informazione rilevante sia disponibile già all'inizio del gioco, e si ammettono solo revisioni delle probabilità attribuite ai vari eventi per effetto dello svolgimento del gioco stesso basate sulla regola di Bayes. Quando si usa la forma estesa, invece, si può permettere che l'informazione di un giocatore vari in maniera sostanziale nel passaggio da uno stadio all'altro; man mano che osserva le mosse dell'avversario, può imparare cose, sia su di lui, sia sullo stato del gioco, e può fornire informazioni, su di sé e sullo stato del gioco, non necessariamente veritiere, come del resto non sono necessariamente veritiere le informazioni che il comportamento dell'altro ha "rivelato". Di fatto, è proprio per analizzare il ruolo dell'informazione, i vincoli che essa pone, che è utile impiegare questa forma.

In questo e nel prossimo capitolo ci si limiterà però solo ai giochi a informazione completa,[51] così l'informazione di cui è dotato un soggetto non può cambiare durante il gioco stesso. Inoltre, si supporrà che ciascuno conosca non solo tutte le regole del gioco ma anche l'intero insieme delle strategie ammissibili e sa che anche gli altri giocatori hanno e usano la stessa quantità di informazioni.

Quando si usano queste ipotesi, ad ogni rappresentazione in forma estesa è possibile associare una ed una sola rappresentazione in forma strategica e viceversa. Tuttavia, l'analisi delle due rappresentazioni non porta sempre alle medesime conclusioni.[52] La scelta tra una rappresentazione e l'altra è quindi molto più che una scelta di comodità.

Una volta che si sia costruito l'insieme delle strategie di ciascun giocatore,[53] rappresentare un gioco in forma strategica è di solito molto più semplice e soprattutto permette una trattazione più generale di alcuni problemi, ad esempio di quelli di esistenza e di efficienza o inefficienza di un equilibrio del gioco. Ma è più facile stabilire condizioni di unicità usando la forma estesa. Comunque, i risultati generali non sono molto comuni in questo campo.

---

[51] Definita tra breve.

[52] Come si vedrà quando si introdurrà il concetto di equilibrio perfetto nei sottogiochi.

[53] Ma questa, come si è detto, è la fase solitamente più delicata e difficoltosa.

Contro la rappresentazione in forma estesa sta il fatto che, man mano che aumentano il numero di stadi ed il numero di mosse possibili in corrispondenza ai vari nodi, diventa rapidamente difficile da utilizzare. A suo favore vi è il fatto che molti problemi sono ancora affrontabili solo in termini di analisi caso per caso; per questo tipo di indagini la rappresentazione in forma estesa è più intuitiva e, essendo molto più flessibile di quella strategica, consente di modellare in modo più preciso la situazione che si vuole considerare e di analizzarla in modo più semplice e soprattutto più trasparente.[54]

Come si è detto, questo vale, in particolare, quando si vogliono discutere le ipotesi che si fanno sull'informazione di cui si vuole che siano dotati i giocatori, ad esempio, le implicazioni di un'ipotesi come quella di conoscenza comune o gli effetti del variare dell'informazione di cui è dotato ciascun giocatore man mano che il gioco passa da uno stadio all'altro.

2.4. Risultato di un gioco

Si supporrà che, ad ogni a, sia associato uno ed un unico risultato, r(a). Se si sostituisce la forma compatta adottata sopra con una forma un po' meno compatta, si osserva che:

$$r(a) = r(a_1, \dots, a_f, \dots, a_F),$$

il che mette in risalto il fatto che il risultato raggiunto dipende da quale strategia è stata adottata da ciascun giocatore.

Affinché la struttura di gioco sia essenziale, occorre che il risultato raggiunto non possa mai essere dipendente esclusivamente dalle scelte di uno dei giocatori.[55] Deve sempre essere vero che almeno due agenti dispongono di almeno due strategie per ciascuna delle quali il risultato raggiunto dipende, o può essere influenzato

[54] Casi ovvi sono quello delle cautele da usare nell'eliminazione delle strategie dominate in senso debole e alcuni criteri di raffinamento delle soluzioni di un gioco.

[55] Questo è il momento di ritornare alla domanda sulla conta e vedere come la definite, ossia se è un gioco, nel senso sopra precisato, o meno.

dall'altro attraverso una opportuna scelta della propria strategia, e essere influenzato in una maniera che verrà specificata tra poco.

È questo ciò che contraddistingue la teoria dei giochi da quella del comportamento ottimale solitamente impiegata. Nella teoria dell'ottimizzazione, si analizza qual è il comportamento che massimizza una determinata funzione obiettivo, eventualmente soggetto al rispetto di vincoli; nella teoria dei giochi si cerca il comportamento ottimale di un giocatore sapendo che ciò che lui otterrà da un'azione[56] dipende da quale comportamento almeno un altro giocatore ha deciso di adottare, e sapendo che anche l'altro giocatore sta cercando di comportarsi in maniera ottimale tenendo conto che ciò che otterrà dipende da ciò che il primo ha deciso di fare.

Questa è anche la ragione per cui nella teoria dei giochi si vuole che ciascun giocatore determini una strategia: non semplicemente quale comportamento tenere ma quale comportamento tenere in ciascuna delle condizioni raggiungibili rispettando le sole regole del gioco. Nel determinare la strategia da adottare, un giocatore deve tener conto degli effetti che la propria scelta avrà sulle condizioni in cui si trova a scegliere un altro giocatore,[57] sui risultati che quest'ultimo potrà raggiungere, e degli effetti che la scelta dell'altro avrà sulla propria situazione. Il fatto che il risultato dipenda dalle decisioni di entrambi dà a ciascuno la possibilità di influenzare la scelta dell'altro e gli impone di considerare l'influenza che le scelte dell'altro avranno su di sé. Ciascuno dei due vuole utilizzare questa capacità di influenzare l'altro a proprio, anche se non necessariamente esclusivo, vantaggio ed è la bidirezionalità di questo legame che rende complessa e interessante la situazione.

Il risultato raggiunto è a sua volta un oggetto complesso. Può consistere in modificazioni diverse per ciascun soggetto dello stato in cui si trova. Questo è il caso del gioco a pari o dispari quando vi sono in palio 100 lire: chi vince vede aumentare il denaro nelle proprie ta-

---

[56] Ciò che è importante è che il risultato ottenuto dipenda dal comportamento dell'altro, mentre non è necessariamente vero che l'azione ottimale per lui dipenda dal comportamento altrui.

[57] Ove le condizioni riguardano tanto lo stato raggiunto dal gioco, quanto l'insieme delle informazioni desumibile dall'osservazione dei comportamenti tenuti.

sche di 100 lire, chi perde lo vede diminuire di 100 lire. Ma può anche consistere in modificazioni identiche dello stato dei vari giocatori, che però possono valutare questo cambiamento in maniere diverse; questo è il caso delle decisioni in materia di produzione e finanziamento di un bene pubblico.

Mentre nel caso di a, è importante distinguere le sue componenti, non ci sono però vantaggi dal distinguere eventuali diversità di risultati per i diversi agenti, almeno se si va oltre la sola forma-gioco, come si vedrà tra breve.

E' più importante sottolineare che r tiene conto degli eventuali costi sopportati da ciascun agente per mettere in atto la propria strategia. Negli esempi fatti sopra, questi costi non sono rilevanti; nel giocare a pari e dispari, la differenza di sforzo o di soddisfazione tra il mostrare un certo numero di dita o un altro non sembra gran che. Ma la teoria si applica, ad esempio, ai rapporti di lavoro in cui entrano in modo rilevante, sforzo, fatica, abilità, attenzione, intelligenza prestata e soddisfazione legate al mettere in atto un comportamento piuttosto che un altro. In alcuni casi è opportuno separare gli effetti dovuti al comportamento tenuto dalle risorse che si sono dovute distruggere per metterlo in atto, ma, almeno al livello a cui ci stiamo muovendo, queste specificazioni possono essere trascurate.

Facendo variare a in A, si ottiene l'insieme dei risultati raggiungibili, R[58], e si indicherà con r un generico elemento di R. In altre parole, le ipotesi fatte sul legame tra a ed $\varphi(a)$ definiscono una funzione:

$$\varphi: A \rightarrow R,$$

ove R è l'insieme di tutti i risultati raggiungibili attraverso opportune scelte della strategia da adottare da parte dei vari giocatori. Essendo A finito, anche R deve essere finito.

Quando almeno uno dei giocatori usa una strategia mista, diventa incerto quale mossa farà in almeno uno stadio del gioco, ossia diventa incerta quale strategia pura userà. Una strategia mista porta perciò a incertezza su quale risultato si otterrà. Se si è in grado di at-

---

[58] Il simbolo R verrà impiegato anche con significati diversi da questo, ma il contesto rende ovvio il senso che gli si deve attribuire di volta in volta.

tribuire una probabilità all'uso delle varie strategie pure che compongono le strategie miste, si è però in grado di determinare la distribuzione di probabilità sui vari risultati raggiungibili impiegando le strategie pure di partenza. Si userà sempre φ per indicare la funzione dall'insieme delle strategie miste sull'insieme delle distribuzioni di probabilità su R.

F, A e φ definiscono una *forma-gioco*. Salvo avviso contrario, in tutti i casi considerati in queste note si supporrà che ciascun giocatore conosca *F*, vale a dire sappia quanti e chi sono gli agenti che partecipano al gioco. Nei giochi da salotto, se ciascuno di essi conosce le regole del gioco, ciascuno è potenzialmente in grado di costruire non solo il proprio insieme di strategie ammissibili ma anche quello di ogni altro giocatore e perciò è in grado, ma sempre solo potenzialmente, di costruire A. Sempre le regole del gioco determinano φ. In molti giochi reali, come quelli di interesse per l'economia e la politica, invece, determinare A e soprattutto φ è molto più problematico. In queste note, però, sia A sia φ verranno supposti dati e noti a ciascuno dei giocatori. Con un piccolo abuso di notazione, si scriverà r(a) per φ(a).

2.5. Il valore delle vincite

Prima di introdurre la formulazione più generale che associa un valore a ciascuno dei vari risultati da parte di un giocatore, val la pena di partire da un caso particolare.

Si consideri dapprima il caso semplice in cui i giocatori sono vincolati a, o semplicemente scelgono di, adottare solo strategie pure. In questo caso, come si è detto ad ogni a in A è associato uno ed unico risultato r = r(a) in R. In queste condizioni, la cosa più semplice è richiedere che ciascun soggetto sia dotato di un criterio di valutazione dei risultati che soddisfi le condizioni di completezza e transitività. Essendo R finito, questo basta ad assicurare che il criterio di valutazione sia rappresentabile attraverso una funzione a valori reali, quella che verrà considerata la funzione obiettivo di f, u^f, definita su R.

Si indicherà con u(r(a)) il vettore degli effetti sui valori raggiunti dalle funzioni obiettivo dei vari agenti quando si mettono in atto le azioni specificate nel vettore a e si raggiunge il risultato r(a), vale a dire,

$$u(r(a)) = \{u^1(r(a)); \ldots ; u^f(r(a)); \ldots ; u^F(r(a))\},$$

ove

$$u^f(r(a)) = u^f(r(a_1, \ldots, a_f, \ldots, a_F)).$$

Per brevità, u(r(a)) verrà detto il vettore dei valori delle vincite, o dei guadagni, e $u^f(r(a))$ il valore della vincita o il guadagno del giocatore f quando viene adottato il vettore di strategie a e raggiunto il risultato r(a).

Ordinare l'insieme dei risultati era tutto ciò che occorreva fare nelle scelte in condizioni di certezza, dal momento l'ordine dei risultati determinava in modo univoco un ordine delle azioni tra cui il soggetto si trovava a scegliere. Nelle nuove condizioni, la biunivocità di r non è più garantita, così che u^f può non essere in grado di ordinare completamente A, dal punto di vista di f. Purtroppo, persino quando vi è biunivocità, neppure la completezza dell'ordinamento di A, di per sé, è particolarmente utile nel contesto dei giochi, dal momento che f non può scegliere a, ma solo la componente di a che lo riguarda, a^f, e questo non è sufficiente a determinare quale risultato verrà raggiunto.

Si dimostra però che u^f determina un ordinamento anche di A_f, attraverso la relazione di dominanza,[59] un ordinamento transitivo ma solitamente parziale. Usando questo solo ordinamento si può fare molta strada. Ad esempio, è possibile costruire l'insieme degli elementi massimali di A_f rispetto a questa relazione. Questo basta per costruire l'insieme delle soluzioni di un gioco,[60] in molti casi, ad e-

---

[59] Grosso modo, si dice che a'_f domina a''_f se, quando usa la prima strategia f ottiene un risultato non peggiore di quello che avrebbe ottenuto se avesse usato la seconda, date le scelte degli altri giocatori, qualunque queste siano, purché ammissibili. Su questo concetto si ritornerà nel capitolo che segue, distinguendo dominanza stretta da dominanza debole.

[60] Anche il concetto di soluzione di un gioco verrà definito nel cap. 3.

sempio in quasi tutti i giochi presentati nel cap. 1, consente di determinare anche alcuni degli equilibri,[61] talvolta addirittura tutti gli equilibri di un gioco.[62]

Sia accontentarsi di un ordinamento parziale dell'insieme delle proprie azioni, sia vincolare all'uso di strategie pure è troppo restrittivo in molte circostanze. Questi due aspetti, poi, sono strettamente legati tra di loro. Che la relazione di dominanza generi solo un ordinamento parziale è il riflesso di due fatti: il primo è che r può non essere invertibile; il secondo è che, data l'azione scelta ad esempio da f, il risultato raggiunto cambia al variare delle azioni scelte dagli altri giocatori.

Il secondo, in particolare, implica che, in generale, come nel caso delle scelte in condizioni di incertezza, ad ogni azione a_f sono associati più risultati alternativi possibili, a ciascuno dei quali può essere associata una probabilità, oggettiva o soggettiva, di verificarsi. D'altro canto, scegliere una strategia mista è determinare una distribuzione di probabilità tra i possibili risultati. In entrambi i casi, si sta scegliendo tra distribuzioni di probabilità dei risultati. Questo spinge ad adottare, nell'analisi delle scelte in condizioni di gioco, la stessa struttura formale che si usa per analizzare le scelte in condizioni di incertezza.

Invece di partire da un ordinamento dei risultati, si parte da un ordine definito sulle azioni, non però solo quello delle azioni possibili per f, ma per l'insieme dei giocatori, *F*.

Per costruire l'insieme di queste azioni, si parte dal fatto che ciascun giocatore può scegliere la propria azione, la propria strategia, nell'insieme formato da tutte le sue strategie pure e da tutte le strategie miste che si possono costruire partendo da esse. Di fatto, per ogni giocatore f, è rappresentato dal simplesso, solitamente indicato con ΔA_f, avente dimensioni $n_f - 1$, ove n_f è il numero di strategie pure disponibili per f. Questo allarga enormemente l'insieme delle alternative a disposizione del singolo: anche quando si ha a che fare con giochi finiti e quindi con insiemi finiti di strategie pure, l'insieme delle alternative ha la potenza di un continuo.

---

[61] Anche questo concetto dovrà essere definito più avanti.

[62] L'espressione è un po' pleonastica, dal momento che questo vale quando l'equilibrio è unico. Come si vedrà, sono casi importanti ma, sfortunatamente, lungi dall'essere il caso generale.

Si considerano poi tutti i vettori di strategie costruibili partendo da questi insiemi, vale a dire l'intero insieme $\Delta A = \Pi_f \Delta A_f$, il prodotto cartesiano di tutti i ΔA_f. Ad ogni a in ΔA, è associata una distribuzione di probabilità su R. Si indichi con ΔR l'insieme di tutte le possibili distribuzioni di probabilità su R. In pratica, si costruisce una funzione:

$r(\Delta a) : \Delta A \rightarrow \Delta R.$

Si noti che gli elementi sia di ΔA, sia di ΔR, sono distribuzioni di probabilità, quindi, ad esempio, A differisce e non è contenuto in ΔA. Ma è facile vedere quali legami uniscono questi due insiemi: ad esempio, se a_f è una strategia pura di f, essa è associata alla distribuzione di probabilità appartenente a ΔA_f, che prevede che a_f venga giocata da f con probabilità 1 ed ogni altra strategia pura di f venga giocata con probabilità 0, una distribuzione di probabilità ovviamente degenere. Basta reinterpretare la precedente funzione:

$r(a) : A \rightarrow R$

come una funzione da distribuzioni di probabilità degeneri sulle strategie in distribuzioni di probabilità degeneri sui risultati per vedere la nuova funzione come un'estensione della precedente , e questa è la ragione per cui verrà indicata con lo stesso simbolo. Anche nelle nuove condizioni, questa funzione copre ΔR ma non è necessariamente invertibile.

Le preferenze possono alternativamente venir definite su ΔA o su ΔR. Sembra sensato supporre che le preferenze sulle strategie pure, o equivalentemente sulle distribuzioni di probabilità degeneri, restino inalterate quando si estende il campo delle scelte così che l'ordinamento delle alternative nelle due situazioni risulti coerente.

Se la relazione d'ordine di f sull'insieme delle azioni così arricchito, ΔA, ovvero su tutte le distribuzioni di probabilità su R che si possono generare partendo da ΔA, soddisfa le condizioni completezza, transitività, continuità e, ad esempio, di indipendenza,[63] esiste

[63] O di sostituibilità.

una funzione di utilità alla von Neumann – Morgenstern, u^f, definita sull'insieme dei risultati, R, e l'ordinamento di f sui possibili vettori di strategie, Δ A, o sulle distribuzioni di probabilità sui risultati, Δ R, riflette il valore atteso dell'utilità dei risultati così determinata.

Ovviamente, se le preferenze sono definite su Δ A, campo di definizione delle scelte di f, quali strategie f può adottare, e campo delle preferenze di f, qual è l'insieme delle strategie adottate dai vari giocatori, vengono a differire; le preferenze di f riguardano l'intero vettore delle strategie, a, ma, di a, f può decidere solo la componente che lo riguarda, a_f. Questo si traduce immediatamente nel fatto che f ha preferenze definite su Δ R ma, da solo, non è in grado di decidere il particolare elemento di Δ R, r(Δa), che verrà scelto, dal momento che questo è determinato dall'insieme delle strategie adottate dall'insieme dei giocatori.

Se si parte dall'ordinamento sui risultati per determinare l'ordinamento delle strategie disponibili per f, normalmente si ottiene un ordinamento incompleto. Nel caso ora considerato, si parte da un ordinamento completo, definito però su Δ A, mentre il giocatore f è ancora essenzialmente interessato a come ordinare Δ A_f. Come si vedrà, in generale l'ordinamento su Δ A_f derivabile da Δ A è pure esso incompleto, ma può accadere che strategie pure non dominate da altre strategie pure siano dominate da strategie miste e quindi, in generale, l'insieme delle strategie non dominate può cambiare. L'allargamento dell'insieme delle strategie non ha grandi effetti, invece, per quanto riguarda le strategie dominanti. Gli effetti principali di questo allargamento sono, da un lato, quello di sterilizzare[64] le conseguenze della possibile non invertibilità di r,[65] e, d'altro lato, quello di generare una funzione di utilità cardinale definita sull'insieme dei risultati, in luogo del semplice ordinamento di questo insieme da cui si è partiti nel caso particolare.

Nel caso particolare, inoltre, v'era spazio per un'interpretazione causale che vedeva la scelta delle azioni come dovuta alla valutazione dei risultati, le preferenze sui risultati come determinanti

---

[64] Nel senso che, se vi sono più azioni di f compatibili con il raggiungimento dello stesso risultato, esse devono essere indifferenti per f.
[65] Come conseguenza del vincolo di completezza delle preferenze su Δ A.

delle preferenze sulle azioni, anche se un'interpretazione di questo tipo non era necessitata, non era cioè l'unica possibile. Nella formulazione più generale, preferenze sui vettori di azioni, non sulle proprie azioni isolatamente, e preferenze sui risultati sono determinate simultaneamente.

Dal momento che le preferenze riguardano in realtà distribuzioni di probabilità, sulle strategie o sui risultati, si è tentati di spiegare la partigianeria di gran parte dei giochisti per le preferenze rivelate per analogia con quanto accade nelle scelte in condizioni di incertezza. Per queste ultime, si parte dal fatto che è osservabile solo la scelta tra lotterie, e da questa scelta viene derivata l'eventuale preferenza tra risultati alternativi. V'è però un *caveat*: in condizioni di rischio, osservata la lotteria prescelta, si conosce la distribuzione di probabilità ad essa associata; in condizioni di gioco, non si è in grado di osservare quale lotteria abbia scelta il particolare giocatore considerato. Se si guarda il suo comportamento, si osserva solo l'eventuale preferenza tra le azioni che lui può mettere in atto, le preferenze su ΔA_f, che si sa essere incomplete, non quella su Δ A. Quindi, almeno se si vuol spiegare l'atteggiamento di chi fa teoria dei giochi dal punto di vista dell'osservabilità, restano grossi problemi.

Specificando u, il vettore delle funzioni di utilità dei vari giocatori, si passa dalla forma-gioco a un *gioco* vero e proprio, che è quindi caratterizzato, nei casi più semplici dal vettore $\{F, \Delta A, r(\Delta a), u\}$. Anche per le ragioni appena discusse, la parte solitamente più problematica concerne la conoscenza di u, il vettore dei valori delle vincite.

Se si usa la forma estesa, a ciascuno dei nodi terminali, ossia a ciascuno dei risultati possibili del gioco, viene associato il vettore dei valori delle vincite dei vari giocatori corrispondente ad esso.

Nel caso di due soli giocatori, la maniera più semplice di rappresentare un gioco in forma strategica è quella matriciale, già utilizzata nel precedente capitolo. Ad esempio, se i due giocatori vengono indicati con f' ed f'', ciascuno viene dotato di due strategie, $\{a'_{f'}; a''_{f'}\}$ per il primo e $\{a'_{f''}; a''_{f''}\}$ per il secondo, il gioco può essere rappresentato con la matrice che segue:

$f' \setminus f''$	$a'_{f''}$	$a''_{f''}$
$a'_{f'}$	$u_{f'}(r(a'_{f'};a'_{f''}));u_{f''}(r(a'_{f'};a'_{f''}))$	$u_{f'}(r(a'_{f'};a''_{f''}));u_{f''}(r(a'_{f'};a''_{f''}))$
$a''_{f'}$	$u_{f'}(r(a''_{f'};a'_{f''}));u_{f''}(r(a''_{f'};a'_{f''}))$	$u_{f'}(r(a''_{f'};a''_{f''}));u_{f''}(r(a''_{f'};a''_{f''}))$

È molto semplice vedere cosa fare quando l’insieme delle strategie di uno o di entrambi gli agenti contiene più di due elementi. È possibile rappresentare anche giochi che hanno tre agenti. Ma quando il numero degli agenti aumenta, questa rappresentazione cessa di essere praticamente utilizzabile. In gran parte degli esempi, però, si supporrà che i giocatori siano solo due.

Riferimenti bibliografici

Binmore K. (1992) *Fun and games*, Lexington: D. C. Heath and Co.

Geanakoplos J. (1992) Common knowledge, *Journal of Economic Perspectives*, vol. 6, n. 4, Fall, pp. 53-82

Harsanyi J. (1967-8) Games with incomplete information played by Bayesian players, *Management Science*, vol. 14, pp.159-182, 320-334,486-502

Kreps D. M. (1990) *A course in microeconomic theory*, Harvester Wheatsheaf, New York

Mas-Colell A. - Whinston M. D. - Green J. R. (1995) *Microeconomic theory*, Oxford University Press, Oxford

Osborne M. J. - Rubinstein A. (1994) *A course in game theory*, MIT Press, Cambridge

Finito di stampare
nel mese di dicembre 2011
da Gi&Gi srl - Triuggio (MB)

ISBN 978-88-343-2225-3