UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

DIPARTIMENTO DI ECONOMIA INTERNAZIONALE
DELLE ISTITUZIONI E DELLO SVILUPPO

Carlo Beretta

Appunti su giochi e istituzioni:

3 - Soluzioni ed equilibri di un gioco

N. 1103

V&P VITA E PENSIERO

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

DIPARTIMENTO DI ECONOMIA INTERNAZIONALE
DELLE ISTITUZIONI E DELLO SVILUPPO

Carlo Beretta

Appunti su giochi e istituzioni:

3 - Soluzioni ed equilibri di un gioco

N. 1103

VITA E PENSIERO

Prima di essere pubblicati nella Collana Quaderni del Dipartimento di Economia internazionale, delle istituzioni e dello sviluppo edita da Vita e Pensiero, tutti i saggi sono sottoposti a valutazione di due studiosi scelti prioritariamente tra i membri del Comitato Scientifico composto dagli afferenti al Dipartimento.
I Quaderni del Dipartimento di Economia internazionale, delle istituzioni e dello sviluppo possono essere richiesti alla Segreteria (Tel. 02/7234.3788 - Fax 02/7234.3789 - E-mail: segreteria.diseis@unicatt.it).
www.unicatt.it/dipartimenti/diseis

Università Cattolica del Sacro Cuore, Via Necchi 5 - 20123 Milano

www.vitaepensiero.it

ISBN 978-88-343-2226-0

Abstract

After introducing the binary relation of domination and its properties, one defines the concept of non dominated strategies and some conditions for their existence, the concept of solution of a game, that of rationalizability, that of best reply and the concept of non cooperative Nash equilibrium.

JEL. C7 – Games

INDICE

Le scelte in condizioni di gioco

Posti di fronte a un gioco, si possono assumere due posizioni. La più naturale è quella di mettersi nei panni del singolo giocatore; questa è di fatto l'ottica che si userà in gran parte di questo capitolo. Ma ci si può porre, in un certo senso, fuori dal gioco, e chiedersi, adottando un'ottica benevolente, ma imparziale, nei confronti dei giocatori e chiedersi come sarebbe nel loro interesse come gruppo che il gioco venisse giocato.

Dal punto di vista del singolo giocatore, l'ideale è essere in grado in ogni situazione di determinare quale sia la strategia che è ottimale per lui adottare in vista della massima realizzazione dei propri obiettivi. Come si è detto, in una situazione di gioco, l'ottimalità della strategia adottata da un giocatore, fuori da alcuni casi molto importanti ma particolari, non è indipendente dalla scelta, e quindi dall'ottimalità dal loro punto di vista, della strategia adottata dagli altri giocatori. In generale, poi, questa dipendenza non è unidirezionale: come l'ottimalità della scelta di un giocatore non è indipendente dalle scelte fatte dagli altri, così l'ottimalità delle scelte degli altri non è indipendente dalle scelte del primo.

Quando c'è interdipendenza, ciascun giocatore deve in un certo senso risolvere simultaneamente sia il proprio problema di scelta, sia quello degli altri, sapendo però che ciascuno ha una sfera di autonomia esclusiva, cosa che implica che nessuno può vincolarsi o vincolare gli altri a un determinato comportamento se rientra in tali sfere, e che ciascuno fa le proprie scelte in modo indipendente dagli altri. In particolare, non si può far grande affidamento sulla possibilità di raggiungere un certo risultato attraverso l'adozione di una certa strategia se per raggiungerlo occorre che qualche altro giocatore adotti una strategia che, data la scelta del primo, non è ottimale dal punto di vista del secondo. Con le cautele che verranno introdotte, vanno ritenuti raggiungibili quei risultati associati all'uso di un insieme di strategie ciascuna delle quali sia ottimale per il giocatore a cui è associata, date le scelte effettuate dagli altri.

Ma per individuare vettori di strategie di questo tipo, supponendo che ne esistano, ciascun giocatore deve avere informazione, oltre che su se stesso, sugli altri, sulle azioni che possono mettere in atto, sul legame tra azioni messe in atto dai vari giocatori e risultati prodotti da queste azioni, sul modo di valutare questi risultati, o se si vuole, sulla funzione di utilità o la funzione obiettivo perseguita dagli altri e soprattutto sui criteri che questi adottano per scegliere tra strategie alternative.

Quando ci si muove in questa direzione, il primo passo da fare è proprio quello di specificare cosa si intende per comportamento razionale in una condizione di gioco e specificare lo stato dell'informazione di ciascun giocatore.

Ma, oltre a chiedersi cosa è ottimale fare per un dato giocatore, ci si può chiedere, dati gli obiettivi perseguiti da ciascuno, come sarebbe "meglio" o come sarebbe "desiderabile" che il gioco venisse giocato nell'interesse di tutti i giocatori. "Meglio" o "desiderabile" sono ovviamente termini ambigui. Come si è detto, ci si può mettere fuori dalla mischia, assumere un atteggiamento imparziale ma benevolente nei confronti dell'insieme dei giocatori considerati.[1]

Quando si dispone solo dell'ordine in cui ciascuno dei giocatori mette i vari risultati alternativi, ci si deve limitare a giudicare un risultato preferibile ad un altro se ognuno, o almeno uno dei giocatori, preferisce strettamente il primo al secondo mentre nessuno preferisce strettamente il secondo al primo, ossia se il primo domina nel senso di Pareto il secondo. Sulla base del teorema di impossibilità di Sen, si sa che già questo passo non è privo di problemi ed il teorema di Arrow dice che, in generale, non si può andare molto più avanti se non si usano informazioni addizionali.

Se i giocatori sono dotati di un ordinamento completo, transitivo, continuo che soddisfa l'ipotesi di indipendenza, sembrerebbe di poter andare oltre. Si potrebbe tener conto del fatto che, in queste condizioni, ciascun giocatore è caratterizzato da una funzione di utilità del tipo von Neumann - Morgenstern, e quindi sa di quanto preferisce un risultato ad un altro, a meno di una trasformata lineare affine, e che, almeno teoricamente, questa funzione è osservabile anche dal giudice esterno, sempre a meno di una trasformata lineare affine. Si potrebbe perciò desiderare di spingersi ad affermare che un risultato è preferito ad un altro se molti preferiscono di molto il primo al

[1] Per vedere alcune delle direzioni in cui ci si può muovere ed i problemi che si possono studiare, si vedano, ad esempio, Binmore (1994) e (2003).

secondo, anche se qualcuno preferisce, ma di poco, il secondo al primo. Questo richiederebbe però di effettuare dei confronti interpersonali di benessere o di supporre che esista la possibilità di "compensare" chi vede diminuire il proprio benessere. Ma cosa induce i giocatori ad accettare i particolari confronti interpersonali adottati? Cosa assicura che le compensazioni verranno effettivamente corrisposte?

Vi è poi un problema ancor più basilare. Una volta individuato il risultato o la distribuzione di probabilità sui risultati "migliori" dal punto di vista in esame, è automaticamente individuata la strategia pura o mista, che ciascun giocatore dovrebbe adottare per realizzare l'obiettivo perseguito dall'osservatore esterno. Ma cosa garantisce che ciascuno si comporti in tale modo, soprattutto se la strategia da adottare non è la migliore per ciascuno, dato il comportamento assegnato agli altri?

Il fatto che ciò che sarebbe "meglio" fare dal punto di vista del giudice esterno possa differire da quello che i singoli giocatori, dal proprio punto di vista, giudicano ottimale mette in evidenza che lo stato raggiunto quando ciascuno adotta la strategia ottimale per sé, ottimale date le strategie seguite o che si pensa che verranno seguite dagli altri, può non essere ottimale per l'insieme dei giocatori, che ci può essere un conflitto tra razionalità individuale e razionalità collettiva. Quando si verifica una tale divaricazione sorge una tensione: i giocatori sanno che potrebbero star meglio abbandonando il comportamento individualmente ottimale, che se si vincolano ad una razionalità individuale di tipo sostanziale si condannano a rinunciare a guadagni di efficienza e di benessere per tutti che sanno essere realizzabili. Ma può essere razionale non comportarsi in maniera razionale in senso sostanziale?[2]

L'esistenza di questa tensione spiega l'ampiezza dello spettro di possibili situazioni e di problemi a cui i giocatori possono trovarsi di fronte e la varietà di risposte studiate dalla teoria dei giochi.

Schiavi dei loro istinti ferini, gli scienziati della politica mettono spesso in evidenza le situazioni di puro conflitto; queste sono caratterizzate dal fatto che i risultati alternativi che possono essere raggiunti non possono essere ordinati nel senso di Pareto, dal momento che se un giocatore valuta uno di questi risultati preferibile ad

---

[2] Su questo problema, si veda, ad esempio, Sen (1977).

un altro, almeno un altro giocatore ritiene che dal proprio punto di vista, il secondo è preferibile al primo; col suo linguaggio bellicoso lo scienziato della politica direbbe che in questi casi la realizzazione degli obiettivi di uno dei giocatori richiede il sacrifico degli obiettivi di almeno un altro giocatore.[3] In queste condizioni, qualunque azione uno dei giocatori adotti può essere frustrata, anzi, usata a proprio vantaggio e a danno del primo da un altro giocatore; è questo fatto che rende importante per un giocatore essere in grado di legare[4] le mani degli altri, di poter dettare il loro comportamento, di disporre del monopolio della forza. Quando si adotta quest'ottica, si riducono tutti i giochi a giochi di puro conflitto.[5]

Benché non sconosciuta e non rara, questa non è una situazione così generale come si penserebbe.

Le anime sensibili e pensose metterebbero invece in evidenza tutti quei casi in cui i risultati, non solo possono essere ordinati nel senso di Pareto, ma vengono ordinati nello stesso modo da tutti i giocatori.

Nei casi più semplici,[6] v'è un solo risultato Pareto efficiente. Allora, fare ciò che è ottimale dal proprio punto di vista porta automaticamente ad esso e non v'è bisogno di alcun accordo. Se si pensa che questo sia il caso generale, si ragiona come se tutti i giochi fossero inessenziali.

Casi più interessanti sono quelli in cui vi sono più risultati Pareto ottimali, che ovviamente devono essere indifferenti dal punto di vista di ciascun giocatore.[7] L'indifferenza tra i risultati Pareto ottimali rende indeterminata l'azione che è nel miglior interesse di ciascuno compiere e, nei casi rilevanti, la fa dipendere dalle scelte degli altri. In questo caso, introdurre un meccanismo che porti al coordinamento delle scelte individuali diventa necessario. Non essendoci conflitto di interessi su quale coordinamento adottare, la natura del

---

[3] Se non addirittura il "sacrificio" dello stesso giocatore, e non solo dei suoi interessi.

[4] Dal momento che tagliarle si è dimostrato, oltre che rozzo, inefficiente.

[5] Una delle interpretazioni più diffuse di Hobbes va proprio in questa direzione. Vedi, ad esempio, Macpherson (1965).

[6] Si pensi al gioco dei peschi e delle api.

[7] Si pensi al gioco del semaforo.

meccanismo e l'esito del suo operare sono indifferenti, l'importante è che esista o che lo si possa costruire.

Ci si riferisce spesso a situazioni come queste come a casi in cui c'è cooperazione ma questa qualificazione è fuorviante. Quando si parla di cooperazione si ha in mente un gruppo di persone che perseguono un obiettivo condiviso, almeno in una certa misura. Nel contesto in esame, quel che effettivamente si vuole è solo che ciascuno si coordini con gli altri nel perseguimento dei propri obiettivi, e gli obiettivi possono, forse è bene che siano, del tutto egocentrici; si adotta una certa azione perché questa è ottimale dal proprio punto di vista, dato il comportamento tenuto dagli altri, e questa situazione va distinta da quella in cui fare qualcosa che è nel miglior interesse di un altro può, ma non necessariamente deve, tornare a proprio vantaggio.[8]

Anche sulla base di questo fraintendimento, chi adotta questa ottica insisterebbe sulla necessità di parlarsi, trasmettere informazione, su di sé agli altri, ma soprattutto sulla necessità che ciascuno esca da un'ottica strettamente egocentrica, e insisterebbe poi sulla creazione di meccanismi che permettano e favoriscano il coordinamento, o, per usare il loro maldestro linguaggio, la cooperazione. Trascurano però il fatto che è necessario che esistano meccanismi in grado di trasmettere la stessa informazione, lo stesso segnale, simultaneamente[9] a tutti gli agenti e che, ma solo in questo caso particolare, si hanno incentivi a trasmettere informazione veritiera.

Gran parte delle situazioni concrete sta tra questi estremi. Il criterio di Pareto permette di ordinare alcuni degli stati raggiungibili, probabilmente però non tutti; nella misura in cui stati alternativi possano essere ordinati, c'è possibilità e ragione per cercare di raggiungere un qualche coordinamento; l'incompletezza riflette però il fatto che i giudizi dei singoli su come ordinare gli stati alternativi raggiungibili sono in conflitto. In questi casi, coesistono ragioni per cer-

---

[8] E anche qui è discutibile se il fare qualcosa che avvantaggia un altro ma con l'obiettivo del proprio possibile vantaggio non sia una forma, certo sofisticata e meno dannosa di altre, di egoismo.

[9] Si ritorni sul gioco del semaforo, o forse meglio, rispettare la destra o la sinistra nella circolazione stradale, quando esistono molti giocatori non in contatto tutti tra di loro.

care degli accordi, ma al contempo esistono conflitti su quale accordo raggiungere. Questo è il caso di giochi del tipo battaglia dei sessi.

Per di più, raggiungere un accordo non è necessariamente una buona ragione per rispettarlo, così come non si hanno ragioni per trasmettere solo informazione veritiera. Certamente non è una buona ragione se prevede che un giocatore tenga un comportamento che, date le azioni messe in atto dagli altri, non è ottimale dal suo punto di vista, come accade nei casi di dilemma del prigioniero. Per vedere questo fatto si osservi che per gli altri giocatori rispettare l'accordo ha senso solo se credono che il primo lo rispetterà; in queste situazioni, è sensato credere che il raggiungimento di un accordo sia una base sufficiente per credere che il primo lo rispetterà? D'altra parte, la ragione per rispettare l'accordo per il primo sta nel fatto che gli altri abbiano ragioni per rispettarlo; ma ciò che si è appena detto è che l'accordo di per sé non dà sufficientemente buone ragioni agli altri per rispettarlo, e di conseguenza neppure il primo le ha, indipendentemente dalle sue tentazioni egoistiche e sopraffattorie.

Questo fatto illustra un problema ancor più radicale. Anche se le strategie associate all'accordo sono ottimali dal punto di vista di ciascun giocatore, date le strategie che gli altri si sono accordati di adottare, seguire la strategia su cui si è raggiunto l'accordo può esporre i giocatori a una situazione di rischio molto alto, nel caso in cui, per una qualche ragione, si osservasse una deviazione dall'accordo stesso. Questo è quel che accade nei giochi di affidamento. Se i giocatori dispongono di strategie che riducono il rischio a cui si espongono, possono avere ragioni per adottare queste se il rispetto dell'accordo non è assolutamente certo. Per il ragionamento che si è fatto in precedenza, anche in queste situazioni raggiungere un accordo non assicura di per sé certezza del suo rispetto.

Come si vedrà, occorre essere molto più espliciti su cosa significa raggiungere un accordo, quali effetti produce l'accordo sull'ordinamento delle strategie che ciascun individuo ha a disposizione;[10] se non ne ha, se l'ordinamento resta identico a quello esistente prima dell'accordo, il valore dell'accordo può essere dubbio.

---

[10] Dare la propria parola, per una persona leale cambia la matrice dei pagamenti. Ma non tutte le persone ritengono la lealtà un valore, o per lo meno non le danno un valore sufficientemente alto.

Sono questi i problemi che portano a concentrare l'attenzione di ciascun giocatore e di chi studia i giochi, e anche qui con le cautele a cui si è fatto cenno sopra, su vettori di strategie, una per ciascun giocatore, che siano tutte simultaneamente ottimali dal punto di vista di ciascuno, date le strategie adottate dagli altri, siano essi decisi per accordo o meno, sempre supponendo che simili vettori esistano.

3.1. Il problema del giocatore e il concetto di soluzione di un gioco

Posti di fronte a un gioco, ciascuno dei giocatori deve decidere cosa fare, nella terminologia appena introdotta, quale strategia adottare. La scelta deve soddisfare dei vincoli: la strategia deve essere ammissibile, ossia rispettare le regole del gioco. Da un punto di vista formale, ogni f è libero di scegliere a_f in A_f come vuole.

Ma ciascun f vuole che la particolare strategia scelta sia la, o una delle "migliori" nel senso che gli permette di raggiungere il valore più alto possibile di u^f tra tutte quelle appartenenti ad A_f. I problemi nascono dal fatto che, per ciascun giocatore, certamente il risultato raggiunto, ma in generale anche la strategia che è meglio adottare, dipende da quello che ciascuno degli altri giocatori, autonomamente ed indipendentemente, ha deciso di fare. Ovviamente questo comporta che ciascun soggetto conosca il legame tra vettore delle strategie adottate e risultati del gioco, cosa succede ai risultati a seconda di quali strategie verranno messe in atto dai vari giocatori, sé stesso incluso.

Dal punto di vista del singolo giocatore, le scelte in condizioni di gioco differiscono da quelle in condizioni di certezza per il fatto che l'effetto di un'azione, fosse pure una strategia pura, non può essere determinato a prescindere da quali azioni effettueranno gli altri giocatori. Ogni azione o strategia, tipicamente, può portare a risultati alternativi a seconda delle strategie che gli altri giocatori decidono di mettere in atto. Per questa ragione, come nelle situazioni di scelta in condizione di incertezza, ogni azione è associata a un vettore di risultati possibili e non ad un unico risultato.

Vi sono situazioni almeno apparentemente molto semplici in cui la scelta "migliore" per il giocatore in questione può essere determinata senza tener conto di quali saranno quelle degli altri giocatori. Tolti però i giochi inessenziali, anche ciò non semplifica la vita.[11]

Quale strategia verrà adottata dagli altri giocatori non è, in generale, determinato da un meccanismo puramente casuale ma, nelle ipotesi usate dalla teoria, è il risultato di una decisione razionale. Per usare questo fatto occorrono però almeno due cose: sapere che le ipotesi sulla razionalità delle decisioni sono soddisfatte, essere in grado di dire a cosa porta l'impiego della razionalità, cosa che solitamente richiede che si conosca come è fatta la sua matrice dei pagamenti. Ma dal momento che ciò che è "meglio" fare per il secondo giocatore dipende da quali ipotesi costui è in grado di fare sul comportamento del primo, anche il secondo deve sapere se il primo è razionale e quali comportamenti, sempre del primo, sono compatibili con ciò. Come si vedrà, non solo ciascuno deve sapere se l'altro è razionale ma anche se gli altri sanno che è razionale e che lui sa che anch'essi sono razionali. Di più, si vuole che ciascuno sappia che ciascuno sa che ciascuno sa …, in una catena infinita, tutto ciò che si sa del gioco e dei giocatori.

Da un lato, si può usare questo fatto per attribuire una probabilità all'adozione di una strategia piuttosto che di un'altra da parte dell'altro giocatore; d'altro lato, si sa che la scelta dell'altro giocatore riflette le probabilità che quest'ultimo attribuisce all'adozione di una certa strategia da parte del primo, ed entrambi scontano il fatto che ciò che è ottimale fare per ciascuno dipende da, ed influenza, ciò che è ottimale fare per l'altro o gli altri.[12]

Come in ogni problema di scelta, si parte dalla costruzione dell'insieme delle alternative disponibili. Definire cosa si intendeva per alternativa non era difficile per il caso di scelta in condizioni di certezza; ma come si è visto, questa operazione si complicava nel caso di incertezza, dove bisognava distinguere tra ciò che era sotto il

---

[11] Il caso tipico è quello del dilemma del prigioniero, soprattutto se ripetuto un numero predeterminato di volte, o anche quello del millepiedi di cui si avrà occasione di parlare più avanti.

[12] Sui legami tra scelte in condizioni di incertezza e scelte in condizioni di gioco si veda, in particolare, Brandenburger (1992) e la letteratura ivi citata.

controllo dell'individuo, l'azione da mettere in atto, dal risultato raggiunto, che dipendeva, oltre che dall'azione, da quale stato del mondo, determinato da un meccanismo stocastico, si sarebbe venuto a verificare.

Da questo punto di vista, la situazione nelle scelte in condizioni di gioco è simile a quella descritta per il caso di incertezza. Anche qui occorre distinguere tra ciò che è sotto il controllo dell'individuo, quale azione o, meglio, quale strategia egli decide di mettere in atto, dal risultato raggiunto, che dipende anche dalle strategie che gli altri giocatori decidono di mettere in atto. Per costruire l'insieme delle alternative di un giocatore, occorre specificare l'insieme delle strategie che costui ha a propria disposizione. Data la scelta di ciascun giocatore, si ottiene un vettore di strategie, ciascuna strategia essendo associata ad un giocatore.

Per analizzare il gioco, occorre poi costruire l'insieme di tutti i possibili vettori di strategie. Ad ogni vettore di strategie va associato almeno un risultato, uno solo per i casi di giochi in cui non entrano componenti stocastiche. Nel formulare il problema di scelta del singolo giocatore, sembra naturale, date le somiglianze, seguire l'impostazione adottata per le scelte in condizioni di incertezza. Come si è visto nel par. 1.4, si dota ciascun giocatore di una relazione di preferenza definita sulle azioni. In questo modo si genera, per ciascuno dei giocatori, un criterio d'ordine sull'insieme dei risultati, possibilmente una funzione di utilità, tipicamente una funzione alla von Neumann - Morgenstern che è cardinale. A questo punto, si introduce l'ipotesi di razionalità e si procede infine all'individuazione, se esiste, della o delle strategie ottimali.[13]

Questa è in effetti la strada che si seguirà ma, per illustrare le sue implicazioni è opportuno, come già nel par. 1.4, seguire una via più indiretta ed arrivare per gradi alla impostazione indicata.

3.2. L'ipotesi di razionalità

Una volta specificata la funzione obiettivo perseguita da ciascuno dei

---

[13] Su questo punto, per un approccio alternativo si veda Aumann - Dréze (2009).

giocatori, è possibile formulare condizioni sui criteri di scelta adottati dai giocatori.

L'ipotesi usuale è quella di *razionalità sostanziale*. Questa implica che si scelga un elemento almeno massimale, se possibile massimo, dell'insieme delle alternative. L'insieme delle alternative, per ogni f, coincide con A_f o ΔA_f. Per dare un contenuto all'ipotesi, resta solo da specificare qual è la relazione d'ordine rispetto alla quale l'elemento è massimale o massimo.

Si parta dal caso semplice in cui ciascun giocatore è dotato di una relazione di preferenza debole, completa[14] e transitiva,[15] definita sull'insieme dei risultati.[16] Come si sa, questa relazione può essere rappresentata mediante una funzione indice di utilità del giocatore f, u^f, che associa a ciascun risultato un valore numerico e che ha solo un significato ordinale.

Questo ordinamento è in grado di generare un ordine dell'insieme delle strategie disponibili. Si indichi con a_{-f} il vettore a privato della sua componente f, ossia, per una generica componente f, $a_{-f} = \{a_1, ..., a_{f-1}, a_{f+1}, ..., a_F\}$ e, con un piccolo abuso di notazione, si indichi ora $a = (a_f, a_{-f})$.

Si dice[17] che una strategia a_f' è *strettamente dominata* se esiste un a_f'' in A_f tale che, per ogni $\underline{a}_{-f}$, $u^f[r(a_f'', \underline{a}_{-f})] > u^f[r(a_f', \underline{a}_{-f})]$. Adottare la strategia a_f'' porta l'individuo f ad una situazione migliore di quella che avrebbe raggiunto se avesse adottato a_f', qualunque cosa gli altri giocatori decidano di fare.

Si dice che una strategia a_f' è *debolmente dominata* se esiste un a_f'' in A_f tale che, per ogni $\underline{a}_{-f}$, $u^f[r(a_f'', \underline{a}_{-f})] \geq u^f[r(a_f', \underline{a}_{-f})]$. Adot-

---

[14] Ciascun soggetto è sempre in grado di comparare risultati diversi, di dire se un risultato è migliore o almeno non peggiore di un altro, qualunque sia la coppia di risultati considerati. Si dice perciò che u^f definisce una relazione binaria completa sull'insieme dei risultati. La completezza implica inoltre che questa relazione sia riflessiva, in genere non simmetrica.

[15] Se un risultato r' è giudicato non peggiore di un risultato r'' ed r''' è giudicato non peggiore di r''', allora r' debba essere non peggiore di r'''.

[16] Si noti che in questo modo si impone che la valutazione dei risultati sia indipendente da quali strategie, quali azioni, hanno portato ai risultati stessi.

[17] Le definizioni sotto riportate sono formulate ignorando la possibilità di strategie miste che verranno definite più avanti, ma si possono facilmente estendere per coprire questa possibilità.

tare la strategia a_f" porta l'individuo f ad una situazione comunque non peggiore, possibilmente in qualche caso migliore, di quella che avrebbe raggiunto se avesse adottato a_f', qualunque cosa gli altri giocatori decidano di fare.

Si dice che una strategia a_f' è una strategia *dominante* se, per ogni a_f" in A_f ed ogni $\underline{a}_{-f}$, $u^f[r(a_f', \underline{a}_{-f})] \geq u^f[r(a_f'', \underline{a}_{-f})]$. Adottare la strategia a_f' porta l'individuo f ad una situazione comunque non peggiore, possibilmente in qualche caso migliore, di quella che avrebbe raggiunto se avesse adottato qualunque altra strategia, qualunque cosa gli altri giocatori decidano di fare.[18]

Data la parsimonia nell'uso delle informazioni, non ci si può aspettare troppo dal criterio di dominanza or ora definito. Infatti, la relazione di dominanza definita sulle strategie sopra caratterizzata è una relazione binaria tipicamente incompleta, ancorché transitiva. Ciononostante, essa gioca un ruolo cruciale nella soluzione di molti dei giochi solitamente usati come esempi e permette una prima applicazione del criterio di razionalità.

Si dice che un'azione $\hat{a}_f \in A_f$ è un *elemento massimale* di A_f

---

[18] Nella matrice che segue, come si è fatto nel cap. 1, la casella in alto indica i giocatori, solo due, indicati con A e B, il resto della prima colonna e della prima riga indica le strategie disponibili, anche queste ridotte a due, rispettivamente, per A e per B, mentre in ciascuna delle rimanenti caselle, il primo numeretto indica il valore della vincita del giocatore A ed il secondo quello del giocatore B quando A sceglie la strategia indicata sulla riga e B quello sulla colonna a cui appartiene la casella stessa.

A \ B	x_B	y_B
x_A	a ; b	c ; d
y_A	e ; f	g ; h

Che relazioni d'ordine devono intercorrere tra a, c, e g e tra b, d, f ed h affinché esse descrivano in forma estesa il gioco del pari e dispari, quello delle api e dei peschi, la battaglia dei sessi, il gioco del daino e del coniglio e infine il dilemma del prigioniero? Sareste in grado di scrivere questi giochi in forma estesa? Ignorando la possibilità di strategie miste, verificate l'eventuale esistenza di strategie strettamente, o debolmente dominate o di strategie dominanti. Siete in grado di vedere cosa succede nei vari casi se ammettete l'uso di strategie miste e avete argomenti a favore del loro uso?

se non è dominata strettamente da alcuna altra azione appartenente ad A_f; si dice che $a_f^* \in A_f$ è un *elemento massimo* di A_f se domina almeno debolmente ogni altro a_f in A_f.

Il fatto che A_f sia finito e che la relazione di dominanza tra azioni sia transitiva assicura che esiste sempre almeno un'azione massimale. L'incompletezza si traduce invece nel fatto che può non esserci un elemento massimo[19] e che vi possano essere più elementi massimali non ordinabili tra di loro.

Si dice che un individuo si comporta in maniera *razionale in senso sostanziale* se, dovendo scegliere in A_f, sceglie sempre un elemento che sia almeno massimale, e perciò, se esiste, che sia un elemento massimo, rispetto alla relazione di dominanza definita sulle azioni.

L'ipotesi di razionalità è, almeno apparentemente, molto plausibile. Sembra sensato che, se dispone di una strategia a'_f che garantisce guadagni maggiori di quelli che otterrebbe se adottasse a''_f, in corrispondenza ad ogni possibile scelta di strategia da parte degli altri giocatori, f non usi mai a''_f.

Può apparire addirittura troppo poco esigente rispetto a quella impiegata nel caso di scelte in condizioni di certezza. Un'azione massimale, infatti, può essere debolmente dominata da un'altra e se a''_f dà un risultato non migliore di a'_f in alcun caso, e in almeno un caso strettamente peggiore, sembrerebbe sensato non utilizzare mai a''_f. Come si vedrà tra poco, questo può creare problemi quando la razionalità dei giocatori è conoscenza mutua o addirittura comune.

La razionalità *sostanziale* viene solitamente contrapposta a una razionalità detta *procedurale*. Grosso modo, la razionalità sostanziale ordina e sceglie le azioni direttamente in termini di bontà del risultato raggiunto mentre la razionalità procedurale controlla la bontà del metodo di decisione dell'azione e ordina i metodi sulla base della bontà del risultato. I problemi nascono dal fatto che la razionalità sostanziale, anche se spesso lo è, non è però sempre un buon metodo di scelta. In particolare, nel caso di una scelta che preveda una successione di mosse, la razionalità sostanziale controlla e richiede che ciascuna mossa isolatamente considerata sia ottimale tra

[19] Si noti, può non esserci, non necessariamente deve non esserci, come si può vedere facilmente se si guardano gli esempi di gioco sopra citati.

tutte quelle possibili in quello stadio; in particolare, unita all'ipotesi di coerenza, obbliga all'uso dell'induzione all'indietro e questo finisce per escludere molti comportamenti indipendentemente dalla bontà dei risultati che essi permettono di ottenere. La razionalità procedurale giudica invece sulla base del risultato finale[20] ma può avere problemi nel giustificare la mossa suggerita dal metodo adottato in un singolo stadio.

L'ipotesi di razionalità sostanziale, apparentemente banale, è in realtà molto restrittiva e fonte di problemi assai complessi.

Se ne sono esaminati alcuni nell'ambito delle scelte in condizioni di certezza. In quel contesto, ci si può chiedere se è sempre possibile essere razionali nel senso sopra precisato.[21] Essere razionali sembra implicare che, almeno in qualche senso, si "voglia" coscientemente il risultato raggiunto e ci sono cose che si possono avere solo se non vengono "volute", almeno coscientemente,[22] altre su cui è dubbio che pur desiderandole, siano ancora desiderabili se noi le vogliamo, nel senso di costringerle, se possiamo, ad accadere.[23] Quando si passa ai giochi, questi problemi assumono dimensioni diverse.

Giocare, nel senso qui adottato, è perseguire intenzionalmente un obiettivo; questo sembra escludere che possano essere messi in palio risultati che non sono raggiungibili se non con una qualche intenzionalità. Può succedere che il semplice fatto di essere ottenuto come esito di un gioco alteri il valore di un risultato?[24]

---

[20] O qualche volta di quello medio sull'insieme di stadi considerati.

[21] Si osservi la presenza della condizione: " ..., se esiste, ...". Cosa assicura l'esistenza di un r' con le caratteristiche desiderate? E cosa dire e fare quando non esiste?

[22] Gli esempi soliti sono, addormentarsi o essere "spontanei".

[23] Non per nulla, far bere un filtro d'amore all'angelo sotto spoglie umane, si spera decenti, che si vorrebbe si innamorasse di noi può portare diritto in galera e non è quello che una fanciulla dabbene farebbe, o comunque vorrebbe aver bisogno di fare.

[24] Voci non confermate vogliono che a decidere chi avrebbe chiesto la mano di una famosa e brillante, ma piuttosto spigolosa economista sia stata una partita a carte, oltre tutto col pretendente determinato da chi perdeva di più. Fa differenza sapere come è stato determinato il pretendente? Cambierebbero le cose se, invece di giocarsela a carte, i pretendenti potenziali si fossero sfidati in un duello all'ultimo sangue?

D'altra parte, se l'intenzionalità del singolo giocatore è condizione necessaria, non è sufficiente a garantirgli il risultato. Il fatto di avere azioni alternative dà certo libertà di scelta ma come cambia il modo di vedere, eventualmente di misurare la libertà di un individuo? Come occorre qualificare la "libertà di"? E la "libertà da" ha bisogno di essere ridefinita?

Dal momento che nessuno ha il completo controllo del risultato, nessuno ha tutto il merito o la colpa dell'esito del gioco. Nessuno può portare in maniera esclusiva l'intera responsabilità, ma è possibile misurare quanto merito o colpa ha ciascuno, magari in modo da ripartire l'intero merito o l'intera colpa tra i vari giocatori? Si può escludere che possa accadere che nessuno dei giocatori abbia alcun merito o alcuna colpa per il risultato raggiunto? E come devono essere ridefiniti, quale contenuto possono assumere, concetti quali diritto, potestà, facoltà, dovere e obbligo in un contesto di gioco?

Non si ha spazio per trattare questi problemi, che verranno perciò lasciati alla riflessione dello studente. Quel che è importante tener presente è che, quando si adotta questa formulazione non si lascia altra scelta all'individuo che essere razionale in senso sostanziale, sempre supponendo che sia possibile esserlo. Ma essere razionali[25] non è una cosa obbligatoria; non solo può essere costoso, in termini di sforzo e di fatica, e difficile, al limite dell'impossibile, vedere cosa è razionale scegliere, ma essere razionali può non essere desiderabile, anzi, e soprattutto nel contesto dei giochi, può essere una condanna terribile, tale da essere anche disposti a pagare più di qualcosina per evitarla.

Si vedrà tra poco quale ruolo essa giochi, ad esempio, nel precipitare la soluzione associata al dilemma del prigioniero. L'esempio che si farà qui è quello del paradosso di Newcomb.

Nella versione di Sugden,[26] l'esempio vede coinvolti un vecchio ricchissimo filantropo e due giovani avvenenti fanciulle. Delle due, una è molto intelligente e soprattutto attaccata alla razionalità, l'altra un po' svampita e superficiale, come la prima non si perita di nascondere alla seconda; mentre la prima non può impedirsi di vede-

---

[25] D'ora in poi, salvo esplicito avviso contrario, con razionale si intenderà razionale in senso sostanziale.

[26] Vedi Sugden (1991).

re subito tutte le implicazioni di una decisione, l'altra, per quanto talora si sforzi, non riesce mai a vedere oltre il proprio naso.

Il vecchietto, nella sua passeggiata mattutina incontra per strada le due stupende ragazze e fa loro una proposta.[27] "A chiunque di voi verrà a casa mia questa sera con la ferma intenzione di ritornare domani a mezzogiorno e bere un bicchierino d'olio di ricino, io questa sera darò un miliardo. Il miliardo diventerà subito suo e non le potrà più essere richiesto, anche se l'indomani non si presentasse. Sappiate però che dispongo di un recente meraviglioso marchingegno prodotto dalla più avanzata e avveniristica tecnica che mi consente di leggere la vostra intenzione sul ritornare o meno l'indomani." Naturalmente, il premio è stato scelto in modo che il beneficio del miliardo sia senza alcun dubbio giudicato da entrambe superiore al costo della probabile nausea e degli altri inconvenienti che sorbire l'olio di ricino per solito produce.

Il giorno dopo, le due fanciulle si ritrovano per strada. L'intelligente chiede all'altra dove stia andando e l'altra, tutta contenta, le racconta di essere andata a casa del filantropo la sera prima e di aver avuto il miliardo; adesso sta andando a bersi il bicchiere d'olio di ricino. Al che l'intelligente, che confessa di non essere andata dal filantropo, non può far a meno di sbottare in un: "Ma sei proprio sciocca! Il miliardo l'hai avuto e non ti verrà richiesto anche se tu non vai. Sei così stupida da trangugiare un simile schifoso beverone?". Piccata, la svampita risponde: "Ma se tu sei così intelligente, com'è che non hai avuto il miliardo?"

Ovviamente è la razionalità il problema della fanciulla intelligente. Vedendo subito tutte le implicazioni, non poteva far a meno di vedere quale sarebbe stata la sua situazione al momento di decidere se bersi l'olio di ricino o no dopo aver avuto il miliardo. L'alternativa a quel punto sarebbe stata tenersi il miliardo e non bere il portentoso olio, o tenersi il miliardo e trangugiare, magari tappandosi il naso, l'indigesto intruglio. Essendo razionale, sa che di fronte a questa scelta, avrebbe optato per la prima alternativa. Sa perciò di non poter avere la ferma intenzione di trangugiare l'olio e, non po-

[27] Non indecente, come si vedrà, ma passibile di interpretazioni diverse, alla luce del "Dr. Fisher's bomb party", sul quale si veda il saggio di Barry in Elster (1986).

tendo mentire al ritrovato della tecnica, sa che è inutile andare dal filantropo, per quanto desideri il miliardo e trovi gli inconvenienti dell'olio di ricino tutto sommato limitati.[28]

Tutto ciò ammesso, l'ipotesi di razionalità è quanto di meglio sia disponibile per rendere semplici le cose. Da amanti della semplicità e delle cose facili, di conseguenza, si supporrà che sia sempre possibile essere razionali nel senso sopra indicato, che ciascun giocatore sia razionale, sempre nel senso sopra indicato.

Quando un giocatore conosce {*F*, A, r(a), u} e sa di essere razionale e sa che anche l'altro conosce {*F*, A, r(a), u} ed è razionale, si dice che ha *informazione completa*. Se lui o anche solo l'altro hanno dubbi su una qualunque delle componenti di {*F*, A, r(a), u} o sulla razionalità dell'altro, si ha un gioco ad *informazione incompleta*.

---

[28] La versione canonica del paradosso è forse un po' meno divertente, ma è utile conoscerla. Vede coinvolti un folletto, che sempre è in grado di leggere il pensiero, e una persona razionale nel senso sopra indicato. Quest'ultima è posta di fronte a due scatole numerate e chiuse in modo che non se ne possa vedere il contenuto: deve scegliere se aprire e prendersi il contenuto solo della seconda o aprire e prendersi il contenuto di entrambe. Nella prima ci sono 10 £, di sicuro; nella seconda il folletto mette un miliardo di sterline se, grazie alle sue capacità divinatorie, sa che la persona si accontenterà di aprire solo la seconda scatola, oppure 0 £ se sa che le aprirà entrambe. Se la persona è razionale, sa che il folletto ha già preso la propria decisione e che il contenuto delle due scatole è già fissato al momento in cui deve decidere se aprire entrambe o una sola. Poiché è razionale, sa che un miliardo e dieci sterline sono preferibili, sia pure di poco, ad un miliardo solo, e dieci sterline sono sempre meglio di nulla, nel caso la seconda scatola sia vuota. Sa perciò che per essere razionale deve aprirle entrambe e sa perciò che il folletto, che sa che lui è razionale, non metterà nulla nella seconda scatola. Anche in questo caso, la razionalità gli costa un miliardo. (V'è un ulteriore problema: se è razionale, nelle condizioni postulate aprirà mai la seconda scatola?).
Vi sono dubbi sulla solidità del paradosso in entrambe le versioni. In quella canonica, alcuni sospettano che ci sia un'inversione temporale nella successione di decisioni. In quella canonica e in quella di Sugden, c'è il problema della credibilità della perfezione del meccanismo divinatorio delle intenzioni. Si noti infine come la struttura del dilemma sia simile a quello del problema di Ulisse e le Sirene, dove la razionalità porta però a una soluzione del tutto diversa (ma non meno problematica da altri punti di vista).

Salvo avviso contrario, si supporrà sempre che tutti i giocatori abbiano informazione completa, e quindi che il gioco sia ad *informazione completa*. Anzi, si supporrà di più, vale a dire che questa informazione sia conoscenza comune, ossia che tutti sappiano che tutti sanno $\{F, A, r(a), u\}$ e sappiano che tutti sanno tutto quelli che essi sanno del gioco e che anche questa informazione sia conoscenza comune.

Quel che accade quando si ammettono strategie miste, come si è detto in precedenza, è abbastanza ovvio. Nel passare da una situazione all'altra, si sostituisce l'ordinamento dei risultati con un ordinamento completo transitivo, continuo definito su Δ A e che soddisfa la condizione di indipendenza sull'insieme delle strategie, Δ A_f, per ogni giocatore f. La funzione di utilità, u^f, deve ora essere interpretata come una funzione di von Neumann - Morgenstern. Non solo u^f deve essere continua; l'ipotesi di indipendenza, in particolare, garantisce che essa sia lineare, e quindi quasi-concava in a_f.

Le definizioni di strategia strettamente o debolmente dominata e di strategia dominante e non dominata rimangono formalmente inalterate, ma cambia l'interpretazione di u^f.

Sull'esistenza di strategie dominanti non si può sperare molto di più di quanto accadeva quando ci si vincolava a strategie pure. Si rafforzano però i risultati che si possono ottenere in tema di strategie non dominate.

Per dimostrare l'esistenza di strategie non dominate, si parte dall'insieme delle strategie pure non dominate, che si sa non essere vuoto e ovviamente composto da un numero finito di elementi. Si dimostra che se due strategie, a'_f ed a''_f, sono non dominate, e quindi garantiscono almeno quello che si sarebbe ottenuto adottando una qualsiasi altra strategia a_f in Δ A_f, anche ogni loro combinazione lineare convessa non dominata è dominata da a_f. Si costruisce poi l'insieme di tutte le combinazioni lineari convesse delle strategie non dominate, ottenendo un insieme chiuso, limitato e convesso. L'adozione di di una strategia che è combinazione lineare convessa di a'_f ed a''_f può però garantire un valore atteso maggiore di quello associato ad ognuna delle due strategie di partenza. L'esistenza di una strategia non dominata deriva infine dal fatto che u^f è lineare, e dunque continua, su questo insieme rispetto ad a_f.

Dal momento che u^f è quasi-concava, ma non strettamente quasi-concava, non si è sicuri di avere unicità. La quasi-concavità di u^f e la convessità di ΔA_f garantisce però che l'insieme delle strategie non dominate sia convesso e quindi che, se si hanno più soluzioni, l'insieme delle soluzioni formi addirittura un continuo. La continuità di u^f e la compattezza di ΔA_f garantiscono poi che questo insieme sia anch'esso compatto.

Ogni strategia non dominata ha la proprietà di massimizzare la vincita minima, o se si vuole, di minimizzare la perdita massima, associata all'adozione di una strategia, qualunque strategia scelgano gli altri giocatori. Si può poi dimostrare che il valore atteso minimo delle vincite deve essere uguale per ogni strategia non dominata.

3.3. Soluzione ed equilibrio non cooperativo di un gioco

Si supponga ora che esista una strategia strettamente dominante. Naturalmente, se una tale strategia esiste, essa deve essere pura ed unica. Se l'individuo è razionale, quella è la strategia che deve adottare. Ciò che è importante è che per arrivare a questa conclusione non occorre fare alcuna ipotesi su ciò che l'individuo sa degli altri giocatori; per sapere se esiste una strategia strettamente dominante tra tutte quelle che ha a disposizione, tutto ciò che deve sapere è come è fatta la funzione r(a) e come sono fatte solo le sue preferenze sui risultati.

Già a questo punto ci si può chiedere se è razionale essere razionali, per lo meno se è razionale essere razionali in senso sostanziale. Solitamente si difende la razionalità sostanziale per la sua strumentalità nel raggiungimento di "buoni" risultati. In tutti i casi precedentemente esaminati, è la razionalità che porta a scegliere una strategia ottimale.

Si è già sottolineato come l'ottimalità abbia un significato diverso a seconda che ci si riferisca al caso di scelte in condizioni di certezza o a quello di scelte in condizioni di incertezza.

Se si considerano le situazioni di gioco, si noti che, nel caso dei peschi e delle api, la razionalità porta effettivamente a risultati molto desiderabili, porta al migliore dei mondi possibili. Ma basta guardare il caso del dilemma del prigioniero per avere dei dubbi: la razionalità nel senso or ora definito porta entrambi i giocatori a scegliere di confessare, e porta entrambi a stare peggio di come starebbero se entrambi non confessassero, una scelta che era però loro impedita dalla razionalità.

Da questo punto di vista, l'adozione di strategie dominanti, certo non necessariamente impedisce, ma è ben lontana dall'assicurare, il raggiungimento di una situazione rispetto alla quale sia impossibile migliorare i risultati ottenuti da almeno un giocatore senza peggiorare quelli ottenuti da alcun altro; per contro, l'adozione di un vettore di strategie tutte strettamente dominate può portare a risultati che tutti giudicano migliori di quelli raggiunti quando tutti adottano strategie strettamente dominanti.

C'è un altro aspetto forse più importante, anche se meno visibile. Se un giocatore dispone di una strategia strettamente dominante ed è razionale in senso sostanziale, sa cosa deve fare qualunque cosa faccia e qualunque cosa accada all'altro. Dovrebbe acquisire ed utilizzare informazione sulla struttura del legame tra vettore di strategie e risultati e sulla valutazione dei risultati che dà un altro giocatore? Per comportarsi in maniera razionale non ha alcun bisogno di questa informazione, quindi non dovrebbe cercarla, se già non la possiede e forse se la possiede non dovrebbe utilizzarla. Se così fosse la razionalità richiede di non distinguere tra un gioco come quello delle api e dei peschi e un dilemma del prigioniero.

D'altra parte, il dilemma del prigioniero, a differenza di quello delle api e dei peschi, illustra come la razionalità individuale come sopra definita trascura completamente il ruolo dell'interdipendenza delle decisioni e porta a quello che è solitamente identificato come un conflitto tra razionalità individuale e razionalità collettiva. Apparentemente, si hanno qui ovvie ragioni per chiedere che la razionalità individuale sia meno cieca, tenga conto non solo di ciò che è razionale fare dal proprio punto di vista, ma anche di ciò che è razionale fare data la reciproca interdipendenza, almeno per chiedere all'individuo di procurarsi informazione apparentemente inutile, che però è in grado di giustificare o di gettare dubbi sulla razionalità dell'uso razionalità sostanziale. Il problema dei vincoli che la razionalità sostanziale impone circa la ricerca e l'uso di informazione e quello inverso, della quantità di informazione che occorre possedere per giustificare l'uso della razionalità sostanziale, benché abbiano un ruolo prominente in alcune delle più note barzellette sugli economisti, sono stati assai poco esplorati.

Come si vedrà, nel caso del dilemma del prigioniero questo modo di ragionare non produce gli effetti desiderati, ma indica una via che deve comunque essere esplorata. Le ragioni per esplorarla sono legate al fatto che ciò che si è detto fino ad ora "risolve", in qualche maniera e con i limiti di cui si è detto, il problema di scelta dell'azione nel caso un giocatore disponga di una strategia strettamente dominante. Cosa succede se l'individuo dispone di più strategie che non sono dominate e che non possono essere comparate fra di loro? Se si usa l'ipotesi di razionalità, si sa che deve scegliere tra le strategie non dominate. Il problema è identificare quale tra queste deve adottare.

Il fatto che le strategie non dominate non siano confrontabili tra di loro riflette ovviamente il fatto che l'una è "migliore" dell'altra o viceversa a seconda di quali strategie useranno gli altri giocatori. Questo fatto rende importante conoscere non solo il legame tra risultati e la propria funzione obiettivo ma, dal momento che si è interessati a quali strategie adotterà l'altro, anche conoscere, o almeno avere un'idea, una convinzione, anche su quali siano i criteri di scelta e almeno alcune caratteristiche delle funzioni obiettivo di ciascuno degli altri giocatori.[29]

L'informazione minima di cui deve essere dotato in queste circostanze è l'ordine di preferenza dell'altro o degli altri giocatori tra i risultati e se sono razionali nel senso ora in questione o meno.[30] Questo è tutto ciò che basta in situazioni particolari, quando ad esempio, l'altro giocatore dispone di una strategia strettamente dominante. Se si sa che l'altro è razionale in senso sostanziale, si sa quale strategia utilizzerà e si può quindi scegliere la propria dando per scontata la scelta che farà l'altro.

---

[29] Quando si gioca con i propri nipotini, far scoprire loro che si gioca in modo da farli vincere è spesso una cattiva idea, come cattiva è l'idea di farli vincere sempre.

[30] Per non appesantire la presentazione, nella discussione che segue, salvo avviso contrario, si supporrà che vi siano solo due giocatori. Le generalizzazioni al caso di più di due giocatori sono ovvie.

Di fatto, uno dei metodi più semplici di soluzione di un gioco è basato sull'applicazione ripetuta dell'eliminazione delle strategie dominate. Si supponga di sapere che alcune delle strategie a disposizione dell'altro giocatore sono strettamente dominate, dal suo punto di vista, e quindi non verranno usate; nel considerare le proprie strategie, l'insieme dei risultati associato a ciascuna di esse può essere ridotto a quello dei risultati compatibili con l'uso di strategie non strettamente dominate dall'altro. L'effetto principale di questa operazione è che azioni che non erano confrontabili nella situazione iniziale, possono diventarlo dopo questa riduzione e portare all'eliminazione di alcune strategie.[31]

Il secondo giocatore, se suppone che il primo sia razionale, avrà già dato per scontato che non usi mai strategie strettamente dominate nella situazione iniziale; se sa che l'altro sa che anche lui è razionale, sa che l'altro potrà aver eliminato altre strategie sulla base del ragionamento precedente e dovrà tenerne conto nel vedere, nella nuova situazione, quali tra le strategie a sua disposizione continua ad essere non dominata. Se il primo sa che il secondo sa che il primo è razionale, potrà procedere ad ulteriori eventuali eliminazioni di strategie da parte sua. Ma se il secondo sa che il primo sa che il secondo sa che il primo è razionale, ciò può portare ad ulteriori eliminazioni da parte dell'altro. Naturalmente, in un numero finito di passi, il processo deve terminare e può accadere che ciascuno si ritrovi con una sola strategia non dominata.

Occorre fare attenzione a due fatti.

In primo luogo, l'applicazione di questo metodo suppone che i giocatori abbiano un'informazione maggiore di quella sufficiente nel caso di esistenza di una strategia dominante. Per arrivare al primo stadio dell'iterazione dell'eliminazione, occorre non solo che ciascuno sappia l'ordine di preferenza tra i risultati dell'altro ma anche che

---

[31] Per fare un esempio, si supponga che la strategie $a'_{f'}$ dia risultati migliori della strategia $a''_{f'}$, ad eccezione di quando f" usa una strategia, $\underline{a}_{f''}$,che si scopre essere strettamente dominata dal punto di vista di f". Nella situazione iniziale a'_f ed a''_f non erano confrontabili ma, sotto condizione che la strategia $\underline{a}_{f''}$ non venga mai usata da f", la prima domina strettamente la seconda, così che $a''_{f'}$ non verrà mai usata dal giocatore f' se suppone che f" sia razionale.

l'altro è razionale; per andare al secondo stadio, occorre anche che ciascuno sappia che l'altro sa che lui è razionale e ciascuno sa che ogni giocatore conosce, oltre al proprio ordine di preferenza, anche l'ordine di preferenza dell'altro. E la conoscenza della razionalità aumenta nel passare da uno stadio a quello successivo.

In secondo luogo, ci si è fermati all'eliminazione di strategie strettamente dominate; non si sono eliminate strategie che sono solo debolmente dominate. Questo dipende dal fatto che l'ordine in cui si procede all'eliminazione di strategie, se è il primo a partire o il secondo, se in qualche stadio si eliminano prima alcune strategie e poi altre o viceversa, non è rilevante; al termine del processo si arriverà, ciascun giocatore arriverà ad individuare sempre lo stesso insieme di strategie non dominate per sé e per l'altro e tutti e due saranno d'accordo sulle reciproche strategie non dominate. Quando si ammette l'eliminazione di strategie che sono solo debolmente eliminate, l'insieme di strategie non dominate a cui si arriva al termine del processo iterato in generale cambia a seconda dell'ordine in cui è avvenuta l'eliminazione e siccome l'ordine adottato può differire da un giocatore all'altro, i due possono arrivare ad insiemi di strategie non dominate diversi.

Ovviamente, si chiede troppo alla vita se si vuole che l'eliminazione successiva di strategie strettamente dominate porti sempre a una situazione in cui ciascun giocatore si ritrova con una sola strategia non dominata. Per esaminare i problemi che sorgono quando restano più strategie non dominate è necessario introdurre delle nuove definizioni.

Si dice che a_f' è una *miglior risposta* da parte di f ad $\underline{a}_{-f}$ se e solo se $u^f[r(a_f', \underline{a}_{-f})] \geq u^f[r(a_f, \underline{a}_{-f})]$ per ogni $a_f \in A_f$, vale a dire se e solo se a_f' è soluzione del problema:

$$\max_{a_f} u^f[r(a_f, \underline{a}_{-f})]$$

soggetto al vincolo

$$a_f \in A_f.$$

È importante notare che, a questo stadio, si è vincolata la scelta al solo insieme A_f, vale a dire alle sole strategie pure disponibili per f. A differenza di una strategia dominante, è ovvio che una miglior risposta esiste sempre nel caso di giochi finiti,[32] qualunque sia $\underline{a}_{-f}$, non è necessariamente unica ma deve essere un elemento massimale dell'insieme delle strategie disponibili per f, valutate sulla base dei risultati prodotti e del valore ad essi attribuito da f.

Se si estende il dominio delle scelte da A_f a ΔA_f, ogni strategia dominante è una miglior risposta per qualche scelta di a_{-f} in ΔA_{-f}. In questo caso, l'insieme delle miglior risposte ad a_{-f} coincide con l'insieme delle soluzioni del problema

$$\max_{a_f} u^f[r(a_f, a_{-f})]$$

soggetto al vincolo

$$a_f \in \Delta A_f.$$

Il fatto che ΔA_f sia compatto e che u^f sia continua, basta a dimostrare che l'insieme in questione non è mai vuoto. Poiché ΔA_f è convesso e u^f è quasi concava, o contiene un unico elemento o è un continuo, comunque è un insieme convesso. Inoltre, la continuità di u^f e la compatteza di ΔA_f implicano che esso sia anche chiuso e limitato. Di fatto, in questo caso, il concetto di miglior risposta definisce una corrispondenza da ΔA in ΔA_f che è sia superiormente che inferiormente continua.

Naturalmente, nella ricerca della miglior risposta si devono escludere le strategie strettamente dominate; la situazione è più complicata rispetto alle strategie che sono dominate in senso debole. Se esiste una strategia dominante, essa deve essere una miglior risposta; di fatto, essa è miglior risposta qualunque strategia venga adottata dall'altro giocatore.

Come si sospetterà, i casi più interessanti sono quelli in cui non esistono strategie strettamente dominanti, ed è in questi casi che

---

[32] Vedete perché?

il concetto di miglior risposta diventa veramente utile; da questo punto di vista, la miglior risposta è un concetto che generalizza le proprietà della strategia dominante a contesti in cui questa non esiste.[33]

Se si guarda quel che si è fatto fino ad ora, si è partiti dal concetto di strategia dominante e si è visto che quando esiste una soluzione dominante in senso stretto, l'ipotesi di razionalità basta a determinare il comportamento che un individuo deve tenere in un gioco, se vuole comportarsi in maniera razionale. Si è poi passati al caso in cui, neppure dopo iterazioni di eliminazione di strategie dominate si arriva ad una strategia dominante e si è introdotto il concetto di miglior risposta. La miglior risposta mette in evidenza la dipendenza dell'ottimalità della scelta di una strategia per un giocatore dalla scelta di strategia simultaneamente ed indipendentemente effettuata dall'altro e quindi rende le loro scelte interdipendenti. Se le scelte sono interdipendenti, però, l'ottimalità deve essere una proprietà comune alle scelte di strategia di ciascuno dei giocatori.

Questo porta ad una prima definizione. Si dirà che un vettore di strategie, eventualmente miste, è *soluzione di un gioco* se è composto da strategie ciascuna delle quali è miglior risposta, per il giocatore che la adotta, a una qualche strategia non dominata, dopo l'eliminazione iterata delle strategie dominate strettamente, dell'altro giocatore. In un certo senso, una soluzione è un vettore di strategie ciascuna delle quali è razionale in senso sostanziale data una certa ipotesi su quale comportamento terrà l'altro o l'insieme degli altri giocatori, quando questa ipotesi a sua volta è compatibile con l'ipotesi che tutti i giocatori siano sufficientemente razionali da non usare mai una strategia dominata, restando però incerti su quale delle residue userà. Proprio per questo fatto, le soluzioni vengono dette *razionalizzabili*:[34]

---

[33] Se si ritorna al gioco del pari e dispari, questo è un gioco in cui nessuna strategia pura è dominante e contemporaneamente nessuna è dominata. Vincolatevi ad usare solo strategie pure. Costruite la funzione di miglior risposta per uno dei due giocatori. Ripetete lo stesso esercizio per il caso del gioco del semaforo, del dilemma del prigioniero, della battaglia dei sessi, del gioco del daino e del coniglio. Cosa succede se ammettete strategie miste? Vedete ora giustificazioni per l'uso di strategie miste? Se sì, confrontate quelle che usereste per spiegare il loro uso nelle diverse situazioni.

[34] Questo concetto è stato introdotto da Bernheim (1984).

Nel caso di 2 giocatori, ($a_{f'}$; $a_{f''}$) è razionalizzabile se $a_{f'}$ porta al miglior risultato per f’ se f” usa la strategia f”, ma si vuole anche che $a_{f''}$ sia, a sua volta la strategia che porta al miglior risultato per f” se f’ usa una strategia, ad esempio $a'_{f'}$, non necessariamente uguale ad $a_{f'}$, che porta al miglior risultato per f’ se f” usa una strategia $a'_{f''}$ che porta al miglior risultato per f” se f’ usa la strategia $a''_{f'}$ … . Quel che è importante è che, essendo l’insieme delle strategie pure non dominate di ciascun giocatore finito, in un numero finito di passi questa procedura deve portare f’ a scegliere di nuovo di giocare $a_{f'}$.[35]

In molti contesti e per molti scopi, questo concetto è però troppo debole, lascia troppe possibilità aperte. Ad esempio, se sopravvive più di una strategia non dominata per il secondo giocatore, può succedere che l’ipotesi fatta dal primo giocatore su quale strategia adotterà l’altro giocatore si riveli falsa; il primo giocatore aveva motivi per adottare la strategia che ha adottato, e da questo punto di vista non si è comportato in maniera irrazionale, ma si accorge che se avesse adottato una strategia diversa, quella che è miglior risposta alla strategia effettivamente adottata del secondo, avrebbe raggiunto un risultato migliore; osservata la scelta dell’altro, desidererebbe aver fatto una scelta diversa da quella messa in atto. Considerazioni di questo tipo portano a restringere l’attenzione sugli equilibri del gioco stesso.

Il soggetto f non ha alcun incentivo a cambiare il proprio comportamento se osserva o sa che questo è una miglior risposta al comportamento tenuto dagli altri agenti. D’altra parte, se il proprio comportamento non è una miglior risposta al comportamento che si prevede che gli altri terranno o che si osserva che gli altri tengono, vi sono forti ragioni per non adottarlo o per cambiarlo se si persegue la massimizzazione della propria funzione obiettivo. Il minimo che si

[35] Per fare un caso semplice la scelta di giocare pari per il primo giocatore e dispari per il secondo nel gioco del pari o dispari, quando il primo punta sul pari e il secondo sul dispari, è razionalizzabile poiché giocare dispari per il secondo è la strategia migliore in risposta al pari giocato dal primo, ma al dispari del secondo è associata la scelta di giocare dispari per il primo, che a sua volta motiverebbe una scelta di giocare pari per il secondo a cui il primo risponderebbe giocando pari. Sulle proprietà dell’insieme delle sluzioni razionalizzabili si veda il cap. 8 di MasColell - Whinston - Green (1995).

possa chiedere a una strategia perché sia considerata una scelta di equilibrio in un gioco, almeno per l'individuo che la adotta, è che sia tale che l'individuo non si penta di averla scelta, neppure dopo aver osservato quel che gli altri fanno, che, conosciute le scelte degli altri, non dica: "Ah, se avessi fatto quell'altra cosa invece di questa!". E un equilibrio del gioco deve vedere tutti i giocatori in una situazione di questo tipo.

Un insieme di strategie, eventualmente miste, a* tale che, per ciascun agente, a_f* è una miglior risposta all'insieme di strategie adottate dagli altri viene detto un *equilibrio (non cooperativo) di Nash* del gioco in esame. Se per ogni f in *F*, a_f* è una strategia pura, si dice che l'equilibrio è in strategie pure; altrimenti l'equilibrio è in strategie miste.

Ciascuna componente di a*, ciascun a_f*, deve essere realizzabile e tale che nessun f ha ragione di modificarla, dato il comportamento tenuto dagli altri e specificato in a_{-f}*. Il fatto che ciascun a_f* sia una miglior risposta ad a_{-f}* per ciascun f ha ovviamente a che fare con le caratteristiche possedute da r(a*) dal punto di vista di ciascun agente: per ogni f, non v'è alcuna azione realizzabile, nessun $a_f \in A_f$, che lo porterebbe a un risultato $r(a_f, a_{-f}^*)$ tale che, dato a_{-f}*,

$$u^f[r(a_f, a_{-f}^*)] > u^f[r(a_f^*, a_{-f}^*)].$$

Si noti l'importanza della dipendenza dell'intero concetto dal fatto che: a) si ragiona dal punto di vista del singolo agente; e, b) che ciascun f considera a_{-f}* dato.

Per quanto riguarda il primo aspetto, ad esempio, fa grande differenza osservare una partita a scopa tra quattro tapini o una partita di scopone scientifico; se la posta non è troppo alta, nel primo caso, quasi sempre tutti si divertono, comunque vadano le cose, nel secondo, si nota spesso che almeno l'elemento di una coppia fa osservazioni impertinenti e apprezzamenti vagamente ingiuriosi sulle capacità di ragionamento e di attenzione dell'altro.[36] E nel giocare a bridge, è di fondamentale importanza la scelta del partner, tanto che,

---

[36] Si consiglia la visione della pellicola "Lo scopone scientifico" con magistrale interpretazione di Alberto Sordi e Silvana Mangano. Ma può darsi che la memoria mi stia tradendo.

nei tornei dopo cena tra gente che non si conosce più che bene, è spesso usanza mischiare le coppie dopo un certo numero di mani. Tutto ciò riflette il fatto che, da molti punti di vista, pur essendoci quattro persone a giocare, i giocatori sono in realtà due, le due coppie. Ciascuna coppia deve coordinare il comportamento dei suoi membri e dal coordinamento ottiene vantaggi che non si potrebbero avere se ciascuno dei suoi membri decidesse cosa fare autonomamente, perseguendo obiettivi a lui propri, distinti, e possibilmente anche contrapposti, a quelli dell'altro.[37]

L'esempio più ovvio è il caso del dilemma del prigioniero. E' facile vedere che se i due giocatori, naturalmente tutti e due, abbandonassero il punto di vista strettamente individuale, se ragionassero in termini di cosa è conveniente per tutti e due nel loro insieme, anche trascurando la possibilità che il gioco venga ripetuto, sceglierebbero un comportamento diverso da quello associato all'equilibrio di Nash. Per aver ragioni di tenere questo diverso comportamento, occorre però che possano coordinare le proprie decisioni e che possano fidarsi del fatto che l'altro rispetterà l'accordo raggiunto e infine, cosa ancor più importante, che il fatto di aver raggiunto un accordo e di credere che esso verrà rispettato dall'altro dia ragioni sufficienti a sé per rispettarlo a propria volta. Nel crudo realismo delle favole di Esopo e di Fedro si invita alla prudenza, tanto nei riguardi dell'altro quanto nei propri riguardi, quando ci si muove in questa

---

[37] Questo è un punto molto importante su cui si dovrà ritornare in parti successive. Quando si ammette che i giocatori possano formare delle coalizioni tra loro, diventa importante caratterizzare queste coalizioni, dire cosa sono, come si formano, come decidono il comportamento su cui si coordinano, eventualmente chi ha il potere di decidere su quale comportamento coordinare le scelte di ciascun membro, come risolvono eventuali conflitti di interesse al proprio interno, ad esempio al momento della ripartizione della vincita. Ammettere la formazione di coalizioni amplia enormemente lo spettro dei problemi che possono essere studiati, ma rende l'analisi anche molto più complessa, appunto per la varietà di situazioni che si possono presentare. Ma questo è uno dei contesti più importanti in cui studiare il problema della delega del potere di decisione, la formazione ed il funzionamento di gerarchie in un mondo poliarchico, i problemi della gestione "democratica" del potere di decisione all'interno di una coalizione in concorrenza con altre coalizioni.

direzione; nel linguaggio della teoria a cui si sta facendo riferimento si chiede che ciascuno degli individui abbia ragioni per dare credibilità al rispetto degli accordi, eventualmente che i due agenti, e tutti e due, possano "legarsi le mani", ossia mettere in atto azioni che mutano irreversibilmente la situazione di ciascuno e rendono interesse individuale rispettare l'accordo. Ovviamente, ciò che vale nel contesto di un gioco a due, vale in generale per un gioco con n giocatori; ma in questo contesto, le possibilità alternative che occorre considerare si moltiplicano e, come si è detto, su questi temi occorrerà ritornare più avanti.

Per quanto riguarda il secondo punto, il fatto cioè che ciascuno considera a_{-f}^* come dato, si ritorni al caso di gioco a pari a dispari ma si supponga ora che i due giocatori abbiano deciso di giocare non una sola volta ma un numero sufficientemente alto di volte in successione, magari con poste raddoppiate di mano in mano. Uno dei giocatori potrebbe giocare sempre pari per un certo numero di mani nella speranza di indurre l'altro a credere che andrà avanti a giocare pari anche nella mano successiva e decidere la propria strategia sulla base di questa convinzione contando sul fatto che, se riesce in quest'impresa, potrà poi sorprenderlo giocando dispari. Quel che il giocatore in questione vuol fare è di incidere sullo stato delle informazioni, delle convinzioni, credenze ed aspettative dell'altro, in modo da metterlo in condizioni in cui la decisione dell'altro diventi prevedibile ed egli possa trarre vantaggio da questa prevedibilità.

Per vedere alcuni dei problemi che sorgono quando si ammette questa possibilità, ci si chieda se un comportamento di questo tipo è coerente con l'ipotesi di razionalità dei due giocatori. Certamente è sensato cercare, se è possibile, di influenzare le aspettative, e attraverso di esse il comportamento dell'altro. Il problema è se la via indicata è una via che porta a questo risultato nelle ipotesi stipulate. Dovrebbe il secondo giocatore, se è razionale e ritiene che anche l'altro lo sia, basare le proprie convinzioni sull'osservazione del comportamento tenuto dall'altro? Se è razionale e sa che l'altro è razionale, sa che ogni regolarità nel comportamento dell'altro è inaffidabile, fa parte della manovra per indurlo in errore. Ma può chiedersi per quanto tempo l'altro proseguirà nel proprio tentativo. Ma deve ancor prima chiedersi se il fatto che l'altro sia razionale, sappia che lui è razionale e che sa di essere razionale e di giocare contro un giocatore razionale sia compatibile con il tentativo di indurlo in errore. Se l'ipotesi di razionalità vale, deve rispondere di no. Un individuo razionale che si trovi a giocare contro un altro individuo razionale non potrà ami usare razionalmente questa tattica. Osservare un comportamento come quello indicato, perciò, induce a nutrire dubbi sulla razionalità dell'altro e, come si dirà più avanti, trasforma il gioco da uno ad informazione completa ad uno ad informazione incompleta.[38]

Viste alcune peculiarità del concetto di equilibrio rispetto a quello di soluzione, occorre procedere ad un'analisi un po' più approfondita per vedere se esso consenta effettivamente di andare oltre ciò che la razionalizzabilità è in grado di dire; almeno apparentemente, l'equilibrio di Nash usa la razionalità assai più di quanto richieda la semplice razionalizzabilità. Nel seguito, ci si muoverà in due direzioni: nella prima si partirà dalla razionalizzabilità e si farà vedere che se esiste almeno una coppia di strategie razionalizzabili, esiste almeno un equilibrio di Nash; nella seconda ci si chiederà se effettivamente l'uso dell'equilibrio di Nash consente di dire più di quanto si sarebbe in grado di dire usando la sola razionalizzabilità. Come si vedrà, quest'ultima porta a risultati tendenzialmente negativi.

Nelle ipotesi che si stanno esaminando, in particolare quella di numero finito di strategie a disposizione di ciascun giocatore ed il

[38] Si potrebbe forse tentare un'impertinenza e chiedersi: dovrebbero, se sono razionali e vogliono divertirsi, usare la strategia razionale? Più che impertinente la domanda sembra impropria. Cosa vuol dire che vogliono divertirsi? Presumibilmente che non è tanto, o almeno solo, importante il fatto che vincono o perdono le 100 lire per ogni mano giocata, quanto il modo, le ragioni o le supposte ragioni (l'essere riusciti ad indurre l'altro in errore, cosa molto più difficile da accertare della semplice vittoria o sconfitta) per cui riescono a vincere. Ma questo avrebbe dovuto essere catturato nella descrizione del gioco, ad esempio nella specificazione delle funzioni obiettivo di ciascuno dei due giocatori, e avrebbe probabilmente portato a una soluzione del gioco diversa da quella associata al gioco esaminato nel testo. Essere razionali probabilmente non impedisce di giocare per gioco, ma due persone che giocano per gioco e due che giocano solo razionalmente possono giocare un gioco che ha la stessa forma-gioco, ma staranno sempre giocando due giochi diversi e diversi dal gioco con la stessa forma-gioco ma giocato da un giocatore che gioca per gioco e l'altro no.

fatto che la relazione di dominanza tra le strategie è transitiva, è facile dimostrare che l'insieme delle soluzioni non è vuoto. Se contiene un unico elemento, si può facilmente vedere che l'unica soluzione è anche un equilibrio nel senso di Nash.

I problemi più spinosi nascono quando l'insieme delle soluzioni contiene più elementi. Questo significa che almeno un giocatore, anche dopo l'iterazione del processo di eliminazione delle strategie strettamente dominate si trova a disporre di almeno due strategie nessuna delle quali domina strettamente l'altra. Nel caso di due soli giocatori, se uno di questi possiede una sola strategia non dominata, le eventuali due strategie a disposizione dell'altro devono essere indifferenti, data l'ipotesi che il primo si comporti in maniera razionale. Il caso rilevante è perciò quello in cui entrambi i giocatori dispongono di più di una strategia non strettamente dominata

Si trascuri per il momento il caso in cui, delle almeno due strategie residue, una domini in senso debole l'altra e si consideri il caso in cui sopravvivono almeno due strategie che non sono confrontabili tra loro in base al criterio di dominanza. Negli esempi fatti all'inizio di queste note, questa è la situazione che si presenta nel caso del gioco del semaforo, della battaglia dei sessi, del cervo e del coniglio e del pari o dispari.

Con riferimento a quest'ultimo, in particolare, sembrerebbe che l'insieme delle soluzioni non sia vuoto ma che non contenga nessun equilibrio, che un equilibrio di Nash non esista. Questa impressione dipende però dal modo in cui si tende a vedere la scelta dell'individuo in questione: l'idea è che il giocatore possa decidere solo se giocare pari o giocare dispari; se tutti e due prendono la loro decisione in questo senso, uno dei due deve trovarsi pentito della scelta che ha fatto. Ma questa non è l'unica maniera di vedere la scelta dei giocatori. E se si adotta l'opportuna definizione di scelta di strategia, si può dimostrare che in tutti i casi citati un equilibrio esiste; di fatto, nella battaglia dei sessi, nel gioco del semaforo e in quello del cervo e del coniglio, ad esempio, v'è un altro equilibrio oltre i due che sono ovvi e compare un equilibrio anche nel gioco del pari o dispari.[39]

---

[39] Il caso del gioco del cervo e del coniglio pone problemi più complicati; vedete quali?

Per vedere la generalizzazione che è necessario fare bisogna ritornare alla scelta del singolo giocatore. Nell'ipotesi considerata, una volta costruita la funzione di miglior risposta, questa dice al giocatore che la strategie che è ottimale adottare dipende da quali ipotesi fa sul comportamento dell'altro; se l'altro dispone di più di una strategia non dominata, la sua scelta è incerta e dipende dalle ipotesi che l'altro candidato fa sul comportamento del primo. L'interdipendenza esprime il fatto che le ipotesi che ciascuno fa sulla scelta dell'altro devono essere coerenti con ciò che ciascuno sa e con l'ipotesi di razionalità. Si trascuri per il momento questo aspetto e si consideri solo il fatto che il comportamento che verrà tenuto dall'altro è incerto.

Questo è il dominio della scelta in condizioni di incertezza con valutazione soggettiva delle probabilità esaminata nella sezione precedente ed è in questo contesto che tale teoria produce alcune delle sue meravigliose magie.

Nel gioco del pari o dispari, ci si metta nella posizione del primo giocatore. Se egli sa che il secondo giocatore, in condizioni di incertezza, si comporta in modo da rispettare le ipotesi fatte nelle sezioni precedenti può ottenere un sacco di informazioni.

In primo luogo, se può osservare come sono fatte le preferenze tra scommesse del secondo giocatore, il primo è in grado di conoscere non solo la struttura delle preferenze, ma la funzione di utilità, a meno di una trasformata crescente affine, che descrive le preferenze dell'altro tra i risultati, ivi compresi i risultati raggiungibili come esito del gioco; egli è quindi in grado di misurare guadagni e perdite associati ai diversi esiti del gioco, in termini di valore raggiunto dalla funzione obiettivo che descrive il comportamento dell'altro. L'analogo vale per quanto riguarda ciò che può conoscere il secondo giocatore a proposito del primo, naturalmente a parità di condizioni.

Se si suppone che ciascuno sappia cosa l'altro sa, si deduce che essi sono in grado di costruire effettivamente la matrice dei guadagni e delle perdite che descrive il gioco in questione e sanno che questa è la stessa matrice costruita anche dall'altro e sulla base della quale ciascuno ragiona.

Ciò che è più importante è che ciascuno sa come l'altro ragiona, come effettua le proprie scelte, in condizioni d'incertezza: ciascuno dei due sa che l'altro si comporta come se decidesse il proprio comportamento in modo da massimizzare il valore atteso associato alla strategia scelta, e se ciascuno dei due si comporta in modo da rispettare le ipotesi della sezione precedente, anche lui deve scegliere sulla base di un tale criterio.

Da solo, tutto questo non basta a risolvere il problema di decisione sulla strategia da adottare. A questo fine, occorre che ciascuno dei due scelga la distribuzione di probabilità che suppone descrivere il meccanismo di scelta adottato dall'altro, ossia che faccia delle ipotesi sulla probabilità con cui l'altro metterà in atto una data strategia. Se si sa che l'altro è razionale, si sa che certamente non metterà mai in atto una strategia strettamente dominata.

Si potrebbe pensare che, con quest'unico vincolo, qualunque ipotesi sulla distribuzione di probabilità sull'insieme di strategie residue per l'altro sia accettabile, ma questo ignora il fatto che tutti e due sanno che stanno effettuando un gioco e giocandolo razionalmente; l'ipotesi che viene fatta al riguardo deve perciò essere compatibile con la razionalità dell'altro individuo e tener conto del fatto che l'altro individuo sa che si è razionali, di più, che ciascuno sa che ciascuno sceglie in modo da massimizzare il valore atteso associato alla distribuzione di probabilità tra le strategie adottata.

Si consideri ad esempio l'idea che l'altro giocherà pari con certezza, quindi che la distribuzione di probabilità di scelta tra le strategie da parte dell'altro sia degenere. Segue da ciò che il primo dovrà giocare con certezza pari o dispari a seconda che abbia puntato sul pari o sul dispari. Ma allora l'altro deve sicuramente perdere, il che vuol dire che, se tale ipotesi fosse vera, o la matrice non è stata costruita correttamente[40], o l'altro non è razionale, violando in ogni caso le ipotesi.

Da un punto di vista leggermente diverso, se il primo suppone che il secondo abbia scelto di giocare pari con certezza e di conseguenza decide di giocare pari o dispari a seconda dei casi, deve chiedersi come si sentirà il secondo a gioco avvenuto. Constatando che ha perso, il secondo rimpiangerà la decisione presa, si noti non

---

[40] L'altro "vuole" perdere e quindi ha dei guadagni di un qualche tipo se perde, come accade nell'esempio del gioco con i nipotini, cosa che non compare nella matrice.

quella di giocare pari, ma quella di giocare pari con certezza. Da questo punto di vista, la situazione raggiunta è una soluzione del gioco ma non è un equilibrio.

Infine, si ragioni dal punto di vista dei guadagni attesi. Se il primo suppone che il secondo abbia deciso di giocare pari con certezza, dal momento che in questo caso il primo avrebbe una strategia vincente, deve supporre che il secondo abbia deciso di adottare una strategia con un valore atteso inferiore al massimo che avrebbe potuto assicurarsi, e di nuovo ciò indicherebbe che o la matrice non descrive il gioco che si sta effettuando, o la razionalità è violata.

Se il primo suppone che il secondo abbia deciso di giocare pari con probabilità ¾ e di giocare dispari con probabilità ¼, per il primo è ancora ottimale giocare sempre la strategia vincente contro il pari, sia essa pari o dispari, con certezza. Il primo vincerà con probabilità ¾, e perderà con probabilità ¼. In termini di valore atteso, la situazione è identica a quella sopra esaminata e lo stesso ragionamento porterà ad escludere che l'altro possa scegliere una tale distribuzione di probabilità tra le strategie a sua disposizione.

Si può vedere facilmente che, nel caso di un gioco simmetrico come si suppone che sia quello in esame, l'unica strategia razionalmente giustificabile e compatibile con una risposta razionale dell'altro giocatore è che ciascuno dei due giocatori agisca come se scegliesse con probabilità ½ la strategia pari e con probabilità ½ la strategia dispari.

Si noti come, se il primo punta sul pari e gioca pari mentre l'altro gioca dispari, il primo perde. Egli avrebbe ragione per rammaricarsi di aver giocato pari, preferire di aver giocato dispari, se ha scelto pari con certezza; se l'adozione del pari è il risultato dell'operare di un meccanismo casuale, è la conseguenza, ad esempio, dell'esito del lancio di una moneta, non può pentirsi di aver giocato pari, ma, al più, di aver usato quel meccanismo causale di decisione. Quel che si è detto, però, è che, nonostante la sconfitta, non avrebbe ragioni per desiderare di aver usato un meccanismo diverso. E' in questo senso che la situazione in questione è un equilibrio di Nash, ovviamente in strategie miste.[41]

---

[41] Ritornate agli esempi iniziali. Dopo aver individuato le strategie non dominate, determinate l'insieme delle soluzioni. Indicate poi quali giochi han-

L'uso dell'equilibrio di Nash sembra aver portato a una conclusione che non sarebbe stata raggiunta sulla base della sola razionalizzabilità ma un attimo di riflessione fa vedere che è la conclusione a cui la razionalizzabilità avrebbe portato se solo si fosse allargato il campo di scelte alle strategie miste. Se esistono più strategie pure razionalizzabili esiste sempre un equilibrio di Nash, eventualmente in srategie miste e ogni equilibrio di Nash è necessariamente razionalizzabile. Il problema è vedere se arrivati agli equilibri di Nash si possono trascurare le altre soluzioni del gioco, se ne esistono altre.

Per procedere oltre bisogna introdurre un po' di terminologia. Si definisce equilibrio *stretto* un equilibrio di Nash in strategie dominanti. Dire che un equilibrio non è stretto equivale a dire che, per almeno un giocatore, date le scelte di equilibrio degli altri, esistono delle strategie che sono indifferenti a quella di equilibrio nel senso che lo portano ad ottenere uno risultato che per lui, ma ovviamente non per gli altri, è indifferente a quello associato all'equilibrio di Nash.

Nel caso del pari e dispari, l'equilibrio di Nash non è stretto. Se il primo giocatore usa con probabilità ½ pari e con probabilità ½ dispari, per il secondo la vincita attesa non varia anche se gioca con certezza pari o con certezza dispari, di fatto, data la strategia scelta dal primo, qualunque distribuzione di probabilità usi per decidere se giocare pari o dispari.

In conclusione, se esiste una sola soluzione, questa deve essere in strategie dominanti ed è un equilibrio di Nash. La sola razionalizzabilità porta alle stesse conclusioni a cui avrebbe portato Nash. Se esistono più soluzioni, si può dimostrare che esiste sempre almeno un equilibrio di Nash in strategie miste, oltre che eventualmente degli equilibri di Nash in strategie pure, che però devono essere anche soluzioni. Il problema è che l'equilibrio di Nash in strategie miste non è stretto, cosa che riporta in rilievo tutti i vettori di strategie razionalizzabili, una volta escluse le strategie dominate quando si ammette l'uso delle strategie miste.

Accanto a ciò v'è il fatto che le condizioni di unicità dispo-

---

no un equilibrio in strategie dominanti e, per gli altri casi, determinate l'insieme degli equilibri, facendo particolare attenzione agli equilibri in strategie miste.

nibili sono assai stringenti e perciò poco generali. Vi possono perciò essere più equilibri di Nash, e si sa assai poco sul se sia possibile escluderne alcuni, sulla base della sola ipotesi di razionalità, individuare se solo alcuni di essi sono rilevanti, il che vuol dire che non si è in grado di dire pressoché nulla su come dovrebbe comportarsi un giocatore in una tale situazione.

Da un lato, è opportuno sottolineare quanta più informazione si deve supporre che i giocatori abbiano per poter usare la nozione di equilibrio in strategie miste rispetto ai casi precedentemente esaminati. Occorre conoscere non solo l'ordine delle preferenze tra i risultati, ma conoscere la funzione di utilità, propria e dell'altro, sempre a meno di una trasformata crescente affine; occorre conoscere come l'altro opera le proprie scelte di strategia in condizioni di incertezza, ossia che le ipotesi elencate nella sezione precedente sono compatibili col comportamento dell'altro giocatore; occorre poi che ciascuno sappia che l'altro sa che lui sa queste cose. In altre parole, nella versione più semplice della teoria dell'equilibrio in contesto di gioco, si suppone che ciascuno abbia informazione completa e perfetta di tutti questi elementi, in particolare che ciascuno sappia che tutti i giocatori, lui e gli altri, sono razionali e sappia che anche gli altri sanno che tutti, e quindi anche lui, sono razionali e sa che anche loro sono razionali e sanno tutto ciò che lui sa. E ciononostante non si è grado di andare molto più avanti di dove si arriverebbe con l'uso della sola razionalizzabilità.

D'altro lato, a favore dell'equilibrio di Nash sta il fatto che concentra l'attenzione su un insieme di alternative assai più ristretto di quello associato alla razionalizzabilità, cosa che consente di caratterizzarlo e manipolarlo assai più agevolmente. È probabilmente questa la ragione per cui esso è largamente usato in tutta la letteratura corrente sui giochi non cooperativi.

Riferimenti bibliografici

Aumann R. J., Dréze J. H. (2009) Assessing strategic risk, *American Economic Review: Microeconomics*, 1(1), 1-16

Barry B. (1986) Lady Chatterley's Lover and Doctor Fisher's Bomb Party: liberalism, Pareto optimality and the problems of objectionable preferences, in Elster J., Hylland A. (a cura di) (1987) *Foundations of social choice theory*, Cambridge University Press, Cambridge

Bernheim B. D. (1984) Rationalizable strategic behavior, *Econometrica*, 52(4), 1007-1028

Binmore K. (1994) (1998) *Game theory and the social contract*, vol. 1, *Playing fair*; vol. 2, *Playing just*, MIT Press, Cambridge, Mass.

Binmore K. (2003) *Fun and games: a text in game theory*, Houghton Mifflin, London

Brandenburger A. (1992) Knowledge and games, *Journal of Economic Perspectives*, 6. 83-101

Elster J., Hylland A. (a cura di) (1987) Foundations of social choice theory, Cambridge University Press, Cambridge

Geanakoplos J. (1992) Common knowledge, *Journal of Economic Perspectives*, 6(4), 53-82

Kreps D. (1990) *A course in microeconomic theory*, Princeton University Press, Princeton

MacPherson C. B. (1965) *The political theory of possessive individualism*, Clarendon Press, Oxford

MasColell A. - Whinston M. D. - Green J. R. (1995) *Microeconomic theory*, Oxford University Press, Oxford

Osborne M. J. - Rubinstein A. (1994) *A course in game theory*, MIT Press, Cambridge

Sen A. K. (1977) Rational fools: a critique of the behavioural foundations of economic theory, *Philosophy and Public Affairs*, vol. 6, pp. 317-44

Sugden R. (1991) Rational choice: a survey of contributions from economics and philosophy, *Economic Journal*, vol. 101

Finito di stampare
nel mese di dicembre 2011
da Gi&Gi srl - Triuggio (MB)

ISBN 978-88-343-2226-0

9 788834 322260 >