QUADERNI DEL DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE E SOCIALI

Alcuni risultati su prodotto di Hadamard, matrici binarie e sistemi lineari

Mario Faliva – Eugenio Venini

Serie Blu: Metodi quantitativi e Informatica – Quaderno N. 7 Giugno 2003

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

PIACENZA

I QUADERNI
Possono essere richiesti a:

Dipartimento di Scienze Economiche e Sociali, Università Cattolica, Via Emilia Parmense 84, 29100 Piacenza tel. 0523 599342. Oppure si può ottenere una copia dall'area di download del Dipartimento al seguente indirizzo: **http://www.unicatt.it/dipartimenti/ScEcoSoc/default.stm**

Alcuni risultati su prodotto di Hadamard, matrici binarie e sistemi lineari

Mario Faliva

Istituto di Econometria e Matematica,

Università Cattolica, sede di Milano

Eugenio Venini

Dipartimento di Scienze Economiche e Sociali,

Università Cattolica, sede di Piacenza

Sommario

L'articolo, prendendo lo spunto da alcune nozioni cruciali relative ai prodotti di Hadamard e di Kronecker e dando corpo ad un apparato analitico mirato per le operazioni con matrici binarie, elabora un'elegante teoria dei sistemi lineari rispetto al prodotto di Hadamard, pervenendo ad un complesso organico di teoremi per le soluzioni in forma chiusa che rispecchiano, nel pertinente contesto algebrico, i risultati cardine dell'analisi canonica dei sistemi lineari.

Key words: Prodotto di Hadamard, Sistemi lineari, Matrici binarie.

JEL Classification: C630, C690.

1 Introduzione

Questo saggio prende lo spunto da alcune nozioni cruciali sui prodotti speciali di matrici e sulle matrici binarie e ne estende la portata e le implicazioni pervenendo a risultati che consentono di dar corpo ad una teoria dei sistemi lineari formulati in termini del prodotto di Hadamard, articolata in eleganti teoremi sulle soluzioni in forma compatta che riflettono, in chiave speculare, gli enunciati classici [3] della teoria dei sistemi lineari formulati in termini del prodotto convenzionale di matrici.

2 Il prodotto di Hadamard: nozione e proprietà elementari.

Introduciamo qui di seguito le nozioni di base sul prodotto di Hadamard.

Definizione 2.1 ***Prodotto di Hadamard.*** *Siano date due matrici* $\mathbf{A} = [a_{nm}]$ *e* $\mathbf{B} = [a_{nm}]$, *entrambe di ordine (N×M), il prodotto di Hadamard delle due matrici, che indicheremo con* $\mathbf{A} * \mathbf{B}$, *è definito come la matrice* $\mathbf{C} = [c_{nm}]$, *di ordine (N×M), data da:*

$$\underset{(N,M)}{\mathbf{C}} = [a_{nm} \cdot b_{nm}] \tag{2.1}$$

Elenchiamo qui di seguito alcune proprietà del prodotto di Hadamard [1]:

i)

$$\mathbf{A} * \mathbf{B} = \mathbf{B} * \mathbf{A} \tag{2.2}$$

per $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrici arbitrarie dello stesso ordine. Il prodotto di Hadamard gode quindi della proprietà commutativa.

ii)

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) * \mathbf{C} = \mathbf{A} * \mathbf{C} + \mathbf{B} * \mathbf{C} \tag{2.3}$$

per $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ matrici arbitrarie dello stesso ordine.

[1] Le proprietà elencate si dimostrano, con relativa facilità, partendo dalla definizione stessa di prodotto di Hadamard [4].

iii)

$$(\mathbf{A} * \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} = [(\mathbf{A}\ \mathbf{B}') * \mathbf{I}] \cdot \mathbf{u} = [(\mathbf{B}\ \mathbf{A}') * \mathbf{I}] \cdot \mathbf{u} \tag{2.4}$$

per $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrici quadrate arbitrarie dello stesso ordine, $\mathbf{u}$ essendo un vettore le cui componenti sono tutte uguali a uno.

iv)

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = [(\mathbf{a}\ \mathbf{u}') * \mathbf{I}] \cdot \mathbf{b} \tag{2.5}$$

con $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ vettori arbitrari dello stesso ordine [2].

v)

$$\mathbf{A} * \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} * \mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{12} * \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} * \mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{22} * \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

con $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrici arbitrarie dello stesso ordine scomposte allo stesso modo.

Definizione 2.2 ***Matrice unità rispetto al prodotto di Hadamard.*** *Chiameremo matrice unità rispetto al prodotto di Hadamard una matrice* $\mathbf{U}$ *tale che per qualsivoglia matrice* $\mathbf{A}$ *delle stesse dimensioni sia verificata l'uguaglianza:*

$$\mathbf{A} * \mathbf{U} = \mathbf{A} \tag{2.7}$$

Come è facile verificare $\mathbf{U}$ è la matrice i cui elementi sono tutti uguali ad uno.

3 Prodotto di Kronecker e matrice di trasposizione

Date due matrici $\mathbf{A} = [a_{nm}]$ di ordine (N×M) e $\mathbf{B} = [b_{pq}]$ di ordine (P×Q), il prodotto di Kronecker delle due matrici, prodotto che indicheremo con $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$, è definito come la matrice composta $\mathbf{C} = [c_{ij}]$, di ordine (NP×MQ), data da:

$$\underset{(NP,MQ)}{\mathbf{C}} = [a_{nm} \cdot \mathbf{B}] \tag{3.1}$$

[2] Si noti che:

$$(\mathbf{a}\ \mathbf{u}') * \mathbf{I}$$

è la matrice diagonale in cui gli elementi della diagonale principale sono costituiti dagli elementi del vettore $\mathbf{a}$.

Introduciamo ora la nozione di matrice di trasposizione che ci tornerà utile nel seguito.

Definizione 3.1 ***Matrice di trasposizione.*** *Chiameremo le matrici composte della forma:*

$$\underset{(MN,MN)}{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \otimes \mathbf{e}'_{1(N)} \\ \mathbf{I}_M \otimes \mathbf{e}'_{2(N)} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \mathbf{I}_M \otimes \mathbf{e}'_{N(N)} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

matrici di trasposizione in quanto per $\mathbf{A}$ *matrice di ordine (N×M) arbitraria, vale la relazione:*

$$\underset{(MN,MN)}{\mathbf{H}} \cdot vec\ A = vec\ A' \tag{3.3}$$

La matrice $\mathbf{H}$ consente di trasporre la matrice $\mathbf{A}$ espressa nella forma vettoriale vec$\mathbf{A}$.

Per la dimostrazione della relazione 3.3 sono sufficienti semplici passaggi che si giustificano in base alle proprietà dell'operatore vec e del prodotto di Kronecker [2, pp.83-86].

4 Matrici binarie

Introduciamo alcune definizioni [1].

Definizione 4.1 ***Matrice binaria.*** *Diremo binaria (o booleana) una matrice i cui elementi assumono soltanto i valori zero o uno.*

Definizione 4.2 ***Matrice binaria associata ad una matrice data.*** *Data una qualsivoglia matrice* $\mathbf{A}$ *di ordine (N×M), chiameremo matrice binaria associata ad* $\mathbf{A}$ *ed indicheremo con* $\mathbf{A}^b$ *la matrice i cui elementi sono nulli in corrispondenza agli elementi nulli di* $\mathbf{A}$ *e sono uguali ad uno in corrispondenza agli elementi non nulli di* $\mathbf{A}$.

Si noti che, se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono matrici non-negative dello stesso ordine, si ha:

$$(\mathbf{A}^b + \mathbf{B}^b)^b = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^b \tag{4.1}$$

Così pure se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono matrici non-negative, conformabili per il prodotto, si ha:

$$(\mathbf{A}^b \cdot \mathbf{B}^b)^b = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^b \tag{4.2}$$

Definizione 4.3 ***Inversa generalizzata riflessiva rispetto al prodotto di Hadamard.*** *Data una matrice* $\mathbf{A}$*.di ordine (N×M) e di rango arbitrario, chiameremo inversa generalizzata riflessiva rispetto al prodotto di Hadamard, ed indicheremo con* $\mathbf{A}^{H-}$*, la matrice di ordine (N×M) i cui elementi sono nulli in corrispondenza agli elementi nulli di* $\mathbf{A}$*.e sono uguali ai reciproci dei corrispondenti elementi di* $\mathbf{A}$ *quando questi ultimi sono diversi da zero.*

La matrice $\mathbf{A}^{H-}$ così definita soddisfa la coppia di condizioni [3]:

$$\mathbf{A} * \mathbf{A}^{H-} * \mathbf{A} = \mathbf{A} \tag{4.3}$$

$$\mathbf{A}^{H-} * \mathbf{A} * \mathbf{A}^{H-} = \mathbf{A}^{H-} \tag{4.4}$$

Si noti la seguente relazione notevole fra matrice binaria associata ad una matrice e inversa generalizzata riflessiva rispetto al prodotto di Hadamard:

$$\mathbf{A}^b = \mathbf{A} * \mathbf{A}^{H-} = \mathbf{A}^{H-} * \mathbf{A} \tag{4.5}$$

Definizione 4.4 ***Matrice idempotente rispetto al prodotto di Hadamard.*** *Chiameremo idempotente rispetto al prodotto di Hadamard (ed indicheremo in seguito come H-idempotente) una matrice* $\mathbf{A}$*.tale che:*

$$\mathbf{A} * \mathbf{A} = \mathbf{A} \tag{4.6}$$

Teorema 4.1 *Condizione necessaria e sufficiente perchè una matrice sia H-idempotente è che sia una matrice binaria.*

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata e discende dalla definizione stessa di prodotto di Hadamard e dal fatto che gli unici numeri idempotenti sono l'uno e lo zero. ■

[3] La matrice $\mathbf{A}^{H-}$ gioca rispetto al prodotto di Hadamard un ruolo analogo a quello che l'inversa generalizzata di Moore-Penrose gioca rispetto al prodotto tradizionale di matrici.

Teorema 4.2 *Se la matrice* $\mathbf{A}$ *è H-idempotente, una possibile scelta della sua inversa generalizzata riflessiva rispetto al prodotto di Hadamard è costituita dalla matrice stessa.*

Dimostrazione. La dimostrazione è banale. Infatti per definizione, se $\mathbf{A}$ è H-idempotente, si ha

$$\mathbf{A} * \mathbf{A} * \mathbf{A} = \mathbf{A} \tag{4.7}$$

e quindi $\mathbf{A}$ è una possibile scelta di $\mathbf{A}^{H-}$. ∎

Definizione 4.5 ***Matrice intersezione di Hadamard.*** *Siano* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *due matrici binarie dello stesso ordine, definiamo intersezione di Hadamard delle matrici* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *la matrice binaria* $\mathbf{C}$ *data da:*

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} * \mathbf{B} \tag{4.8}$$

Si noti che $\mathbf{C}$ ha elementi nulli dove o la matrice $\mathbf{A}$ o la matrice $\mathbf{B}$ o entrambe hanno elementi nulli. $\mathbf{C}$ ha elementi non nulli (ed uguali all'unità) solo e soltanto in corrispondenza agli elementi non nulli di *entrambe* le matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

Definizione 4.6 ***Matrice binaria complementare.*** *Si* $\mathbf{A}$ *binaria, chiamiamo matrice binaria complementare ed indichiamo con* $\bar{\mathbf{A}}$ *la matrice:*

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{U} - \mathbf{A} \tag{4.9}$$

Definizione 4.7 ***Matrice unione di Hadamard.*** *Siano* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *due matrici binarie dello stesso ordine, definiamo unione di Hadamard delle matrici* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *la matrice binaria* $\mathbf{D}$ *data da:*

$$\mathbf{D} = \mathbf{U} - \bar{\mathbf{A}} * \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{A} * \mathbf{B} \tag{4.10}$$

Si noti che $\mathbf{D}$ ha elementi non-nulli (ed uguali all'unità) in corrispondenza a ciascun elemento non nullo (ed uguale all'unità) della matrice $\mathbf{A}$ oppure della matrice $\mathbf{B}$.

Si noti altresì la relazione notevole:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{A} * \mathbf{B} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{b} \tag{4.11}$$

5 Sistemi lineari formulati in termini del prodotto di Hadamard

Per i sistemi lineari formulati in termini di prodotto di Hadamard valgono i seguenti teoremi del tutto simili ai classici teoremi sui sistemi lineari, formulati in termini di prodotto tradizionale di matrici [3, Cap.2] .

Al fine di poter studiare i sistemi all'oggetto è utile premettere alcuni teoremi.

Teorema 5.1 *A qualsiasi matrice* $\mathbf{A}$ *di ordine* $(N{\times}M)$*, è possibile far corrispondere una matrice diagonale* $\mathbf{\Psi}_{\mathbf{A}}$*, di ordine* $(NM){\times}(NM)$*, tale che l'uguaglianza:*

$$vec\,(\mathbf{A} * \mathbf{X}) = \mathbf{\Psi}_{\mathbf{A}} \cdot vec\,\mathbf{X} \tag{5.1}$$

risulti verificata per $\mathbf{X}$ *di ordine* $(N{\times}M)$ *arbitraria. La matrice* $\mathbf{\Psi}_{\mathbf{A}}$ *è esprimibile nella forma:*

$$\mathbf{\Psi}_{\mathbf{A}} = [(vec\,\mathbf{A}) \cdot \mathbf{u}'_{NM}] * \mathbf{I}_{NM} \tag{5.2}$$

Dimostrazione. Osserviamo che per qualsivoglia coppia di matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{X}$ dello stesso ordine si ha:

$$\mathrm{vec}\,(\mathbf{A} * \mathbf{X}) = \mathrm{vec}\,\mathbf{A} * \mathrm{vec}\,\mathbf{X} \tag{5.3}$$

e che la matrice diagonale avente per elementi diagonali gli elementi di un generico vettore $\mathbf{v}$ è esprimibile nella forma:

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}') * \mathbf{I} \tag{5.4}$$

con $\mathbf{u}$ e $\mathbf{I}$ dello stesso ordine di $\mathbf{v}$.
Tenuto conto di quanto sopra detto, un semplice computo permette di verificare l'uguaglianza:

$$vec(\mathbf{A} * \mathbf{X}) = \{[(\text{vec}\ \mathbf{A}) \cdot \mathbf{u}'_{\text{NM}}] * \mathbf{I}_{\text{NM}}\} \cdot vec\mathbf{X} \tag{5.5}$$

La matrice $[(\text{vec}\ \mathbf{A}) \cdot \mathbf{u}'] * \mathbf{I}$, coincidente con la 5.2 è diagonale per costruzione. ■

Teorema 5.2 *Se Ψ è la matrice diagonale corrispondente alla matrice $\mathbf{A}$ del teorema precedente e $\mathbf{H}$ è la matrice di trasposizione, di cui alla 3.2, dell'ordine appropriato, allora $\mathbf{H}\ \Psi\ \mathbf{H}$ è la matrice diagonale corrispondente alla matrice $\mathbf{A}'$.*

Dimostrazione. Grazie alla proprietà del prodotto di Hadamard (cfr .§2), alle proprietà della matrice di trasposizione $\mathbf{H}$ (cfr. §3) ed al teorema precedente, con semplici passaggi, si verifica come:

$$\begin{aligned} \text{vec}\ (\mathbf{A}' * \mathbf{X}) &= \text{vec}\ (\mathbf{A} * \mathbf{X}')' = \\ &= \mathbf{H} \cdot \text{vec}\ (\mathbf{A} * \mathbf{X}') = \mathbf{H}\ \Psi \cdot \text{vec}\ \mathbf{X}' = \mathbf{H}\ \Psi\ \mathbf{H} \cdot \text{vec}\ \mathbf{X} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Confrontando il primo e l'ultimo membro della 5.6 risulta verificato l'enunciato del teorema [4].

■

Teorema 5.3 *Se Ψ è la matrice diagonale corrispondente alla matrice $\mathbf{A}$, ai sensi del Teorema 5.1, allora la matrice diagonale corrispondente alla matrice $\mathbf{A}^{H-}$ è l'inversa generalizzata di Moore-Penrose, Ψ^+, della matrice Ψ.*

[4]Si osservi che qualora $\mathbf{A}$ sia simmetrica sussiste per Ψ la relazione notevole:

$$\mathbf{H}\ \Psi\ \mathbf{H} = \Psi$$

Dimostrazione. L'inversa generalizzata riflessiva, rispetto al prodotto di Hadamard, $\mathbf{A}^{H-}$ è, come è noto, la matrice i cui elementi sono nulli in corrispondenza degli elementi nulli di $\mathbf{A}$, e sono i reciproci dei corrispondenti elementi di $\mathbf{A}$, quando questi ultimi sono diversi da zero. Pertanto la matrice diagonale

$$\Phi = \left[(\text{vec}\ \mathbf{A}^{H-}) \cdot \mathbf{u}'_{\text{MN}}\right] * \mathbf{I}_{\text{MN}} \tag{5.7}$$

è tale che i suoi elementi diagonali sono pari a zero, se zero è il corrispondente elemento diagonale di Ψ, e pari ai reciproci dei corrispondenti elementi di Ψ quando i corrispondenti elementi diagonali di Ψ sono diversi da zero. Essendo Ψ diagonale, la matrice Φ si identifica con l'inversa generalizzata di Moore-Penrose di Ψ. In simboli:

$$\Phi = \Psi^+ \tag{5.8}$$

Nel caso in cui la matrice $\mathbf{A}$ sia binaria, dall'uguaglianza:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{H-} \tag{5.9}$$

consegue l'uguaglianza:

$$\Psi = \Psi^+. \tag{5.10}$$

In particolare per:

$$\mathbf{A} = \mathbf{u}_{\text{N}}\mathbf{u}'_{\text{M}} = \mathbf{U}_{\text{NM}} \tag{5.11}$$

si ha:

$$\Psi = \Psi^+ = \mathbf{I}_{\text{NM}}. \tag{5.12}$$

■

Teorema 5.4 *Siano Ψ e Ψ^+ le matrici diagonali corrispondenti alle matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^{H-}$, ai sensi dei Teoremi 5.1 e 5.3, il prodotto $\Psi^+ \cdot \Psi = \Psi \cdot \Psi^+$ è la matrice diagonale idempotente corrispondente alla matrice binaria $\mathbf{A}^b$.*

Dimostrazione. Dai teoremi precedenti sappiamo che:

$$\begin{aligned} \Psi\ \Psi^+ \cdot \text{vec}\ \mathbf{X} &= \Psi \cdot \text{vec}\ (\mathbf{X} * \mathbf{A}^{H-}) = \\ &= \text{vec}\ (\mathbf{X} * \mathbf{A}^{H-} * \mathbf{A}) = \text{vec}\ (\mathbf{X} * \mathbf{A}^b) \end{aligned} \tag{5.13}$$

■

Fatte queste premesse possiamo passare al gruppo di teoremi più strettamente pertinenti i sistemi lineari.

Teorema 5.5 *Sia* A *una matrice, una soluzione generale del sistema lineare omogeneo:*

$$\mathbf{A} * \mathbf{X} = \mathbf{O} \tag{5.14}$$

è data da:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{U} - \mathbf{A}^{b}) * \mathbf{Z} \tag{5.15}$$

con $\mathbf{Z}$ *matrice delle stesse dimensioni di* $\mathbf{X}$.

Dimostrazione. Per il Teorema 5.1 la 5.14 può essere scritta:

$$\Psi \cdot \mathrm{vec}\ \mathbf{X} = \mathbf{o} \tag{5.16}$$

Come è noto [3], una soluzione generale del sistema lineare 5.16 è data da:

$$\mathrm{vec}\ \mathbf{X} = (\mathbf{I} - \Psi^{-}\ \Psi) \cdot \mathrm{vec}\ \mathbf{Z} \tag{5.17}$$

con $\mathbf{Z}$ matrice arbitraria delle stesse dimensioni di $\mathbf{X}$. Scegliendo:

$$\Psi^{-} = \Psi^{+} \tag{5.18}$$

e ricordando il Teorema 5.4, abbiamo quindi:

$$(\mathbf{I} - \Psi^{+}\ \Psi) \cdot \mathrm{vec}\ \mathbf{Z} = \mathrm{vec}\ \left[(\mathbf{U} - \mathbf{A}^{b}) * \mathbf{Z}\right] \tag{5.19}$$

ed il teorema è pertanto dimostrato. ∎

Teorema 5.6 *Siano* A *e* B *due matrici note, il sistema lineare non-omogeneo:*

$$\mathbf{A} * \mathbf{X} = \mathbf{B} \tag{5.20}$$

è consistente se e solo se è verificata la condizione:

$$\mathbf{A}^{b} * \mathbf{B} = \mathbf{B} \tag{5.21}$$

Posto che valga la 5.21, una soluzione particolare del sistema 5.20 è data da:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{H-}\ \mathbf{B}\ . \tag{5.22}$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione si ricorre all'equivalenza formale del sistema 5.20 col sistema:

$$\Psi \cdot\ \mathrm{vec}\ \mathbf{X} = \mathrm{vec}\ \mathbf{B} \tag{5.23}$$

Partendo dalla condizione di consistenza del sistema 5.23 [3] ci si può ricondurre, come è agevole verificare, alla condizione 5.21 dell'enunciato del teorema. Alla luce della relazione notevole (cfr. la 4.5):

$$\mathbf{A}^{b} = \mathbf{A} * \mathbf{A}^{H-} \tag{5.24}$$

la 5.21 si può riformulare come:

$$\mathbf{A} * \mathbf{A}^{H-} * \mathbf{B} = \mathbf{B} \tag{5.25}$$

da cui si evince come la 5.22 rappresenti una soluzione del sistema 5.20. ∎

Teorema 5.7 *Siano* A *e* B *due matrici note dello stesso ordine, se il sistema lineare non-omogeneo:*

$$\mathbf{A} * \mathbf{X} = \mathbf{B} \tag{5.26}$$

è consistente, la sua soluzione generale può essere espressa nella forma:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{H-} * \mathbf{B} + (\mathbf{U} - \mathbf{A}^{b}) * \mathbf{Z} \tag{5.27}$$

con $\mathbf{Z}$ *matrice arbitraria delle stesse dimensioni di* $\mathbf{X}$.

Dimostrazione. Si ricorre al solito, all'equivalenza formale fra il sistema 5.26 ed il sistema:

$$\Psi \cdot \mathrm{vec}\ \mathbf{X} = \mathrm{vec}\ \mathbf{B} \tag{5.28}$$

Ci riconduciamo quindi alla ben nota espressione della soluzione generale di un sistema lineare non omogeneo standard della forma 5.28 [3]. Avvalendosi infine dei teoremi precedenti, con semplici passaggi ci si riconduce alla 5.27 dell'enunciato del teorema. ∎

Risultano così provati i teoremi per la soluzione dei sistemi lineari formulati in termini del prodotto di Hadamard.

Riferimenti bibliografici

[1] M. Faliva, *Identificazione e Stima nel Modello Lineare ad Equazioni Simultanee*, Vita e Pensiero, Milano, 1983

[2] M. Faliva, *Econometria: Principi e Metodi*, UTET, Torino, 1987

[3] R.C. Rao e S.K. Mitra, *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications*,Wiley, New York, 1971

[4] G.P.H. Styan, *Hadamard products and multivariate statistical analysis, Linear Algebra and Its Applications*, 1973, pp. 217-240

Elenco dei quaderni già pubblicati

Serie Rossa: Economia
Serie Gialla: Sociologia e Diritto
Serie Azzurra: Economia Aziendale
Serie Blu: Metodi quantitativi e Informatica

1. **Fully Funded Social Security and Allocation of Resources: The Case for An Environmental Motive in A Two Countries Overlapping Generations Model**
   Domenico Moro, N. 1 dicembre 2002, Serie Rossa, Economia.

2. **What Money Can't Buy: The Relevance of Income Redistribution for Functioning Levels**
   Sara Lelli, N. 2 febbraio 2003, Serie Rossa, Economia.

3. **Management Control Transformation: Perspectives from the Information Economy**
   Antonella Cifalinò, Laura Zoni, N. 3 marzo 2003, Serie Azzurra, Economia Aziendale.

4. **Firm size distributions and stochastic growth models: a comparison between ICT and Mechanical Italian Companies**
   Lisa Crosato, Piero Ganugi, Luigi Grossi, N. 4 marzo 2003, Serie Blu, Metodi quantitativi e Informatica.

5. **Lo sviluppo del CANTONE di SAINT-LAURENT-DE-CHAMOUSSET (Regione Rhone-Alpes)**
   Barbara Barabaschi, N. 5 marzo 2003, Serie Gialla, Sociologia e Diritto.

6. **The role of transport infrastructures for cohesion and development of an enlarged Europe**
   Odile Heddebaut, N. 6 maggio 2003, Serie Rossa, Economia.

7. **Alcuni risultati su prodotto di Hadamard, matrici binarie e sistemi lineari**
   Mario Faliva, N. 7 giugno 2003, Serie Blu, Metodi quantitativi e Informatica.