QUADERNI DEL DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE E SOCIALI

La Distribuzione della Dimensione delle Imprese: Processi Stocastici, Distribuzioni Asimmetriche e Concentrazione Industriale.

Lisa Crosato

Serie Verde: Metodi quantitativi e Informatica – Quaderno N.8 Giugno 2003

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

PIACENZA

I QUADERNI
Possono essere richiesti a:

Dipartimento di Scienze Economiche e Sociali, Università Cattolica, Via Emilia Parmense 84, 29100 Piacenza tel. 0523 599342. Oppure si può ottenere una copia dall'area di download del Dipartimento al seguente indirizzo: **http://www.unicatt.it/dipartimenti/ScEcoSoc/default.stm**

La distribuzione della dimensione delle imprese: processi stocastici, distribuzioni asimmetriche e concentrazione industriale.

1 Introduzione

Occupandoci dello studio della distribuzione della dimensione d'impresa, ci è sembrato necessario sviscerare e rendere accessibili quei processi stocastici classici continuamente citati in letteratura che, basandosi sulla legge di Gibrat, modellano il processo di crescita delle imprese.
Questo lavoro si propone non solo lo scopo di rendere esplicito lo sviluppo di tali modelli e il modo in cui conducono a distribuzioni statistiche, fortemente asimmetriche, ma in particolare intende afferrarne e renderne chiaro il contenuto economico, dunque le ipotesi su cui si fondano e il significato dei parametri che definiscono.
Cercheremo quindi di illustrare come da un processo stocastico si arrivi ad una determinata distribuzione statistica e come una distribuzione statistica, lungi dall' essere semplicemente uno strumento di rappresentazione, possa invece rivelarsi un'utile chiave di lettura del fenomeno cui si adatta, tenendo come riferimento costante le dinamiche di crescita della dimensione d'impresa.

Un processo stocastico è una famiglia di variabili casuali che dipendono da un parametro *t*, con cui solitamente si indica il tempo.
Se il processo continua per un tempo sufficientemente lungo, la distribuzione della variabile raggiunge un equilibrio, o stato stazionario, a partire dal quale essa resta invariata, prendendo il nome di distribuzione stazionaria.
Nel nostro caso, considerando come variabile casuale la dimensione d'impresa e precisando secondo quali criteri economici si deve evolvere nel tempo, otterremo una distribuzione stazionaria (Lognormale, Yule, Pareto) che modella un certo tipo di economia.
Concretamente, disponendo di una banca dati adeguata, si può partire dall'ultimo passo della catena per poi risalire: se una distribuzione nota ben si adatta, o non si adatta affatto, al fenomeno rappresentato dalla banca dati, avendo ben chiare le ipotesi economiche che conducono ad essa potremo trarre già delle prime conclusioni sul fenomeno stesso.
In termini statistici la legge di Gibrat si può così definire: *ad ogni passo del processo la variazione nella variabile è una proporzione casuale del precedente valore della variabile stessa.*
In termini economici il suo significato è ben descritto da Barca (1985):
'Lo sviluppo delle unità produttive non risente di fattori sistematici connessi alla dimensione produttiva. Ciò equivale ad assumere che le opportunità delle unità produttive, sui mercati dei beni, del lavoro, della moneta e in termini di tecnologia, siano indipendenti dalla dimensione'.
Chiarito il significato della legge, è evidente (e lo dimostreremo in seguito) che il suo agire implica un aumento nel divario tra imprese grandi e piccole, per cui è bene prestare particolare attenzione al problema della concentrazione industriale e ai mezzi con cui coglierne la presenza e le fluttuazioni, evidenziando nei diversi modelli i parametri che la quantificano e valutando l'adeguatezza di alcuni indici di concentrazione nel contesto di applicazione della legge stessa.
È quindi a nostro avviso di estrema importanza possedere strumenti di rilevazione:

1) della disuguaglianza alternativi agli indici *relativi* di variabilità, e ricorrere anche ad indici assoluti di variabilità, primi tra tutti lo scarto quadratico medio e il più robusto MAD;
2) della rigidità, intesa come capacità delle imprese di mantenere le loro posizioni di forza (o di debolezza) reciproche, in primo luogo la matrice di transizione.

Il primo modello che viene proposto è quello di Gibrat, in cui ad ogni passo del processo la variazione nella variabile dimensione è una proporzione casuale del valore della variabile stessa e i tassi di crescita si distribuiscono identicamente, sono indipendenti tra loro e anche dalla variabile dimensione.
Si suppone dunque che i tassi siano delle variabili stocastiche che si distribuiscono indipendentemente e con la stessa media e varianza; tale ipotesi, come vedremo, implica un processo di diffusione che porta ad aumento indefinito della variabilità, quindi della concentrazione. Dal momento che Gibrat pensò alla legge degli effetti proporzionali per giustificare la distribuzione lognormale, che risultava frequentemente descrivere le distribuzioni del reddito in diversi paesi e che infatti è la distribuzione stazionaria del processo da lui descritto, si potrebbe pensare che il ricorrere di tale distribuzione sia da attribuire ad un generalizzato livello di concentrazione elevato.
Kalecki, nel 1945, osservò che nella distribuzione del reddito questa tendenza all'aumento della deviazione standard non si verifica: a tale aumento si contrappongono evidentemente fattori economici e dunque le variazioni casuali non sono indipendenti dalla dimensione di partenza. Egli formulò un modello in cui partiva da un'ipotesi opposta alla legge di Gibrat: postulò una correlazione negativa tra i tassi di crescita e la dimensione e con questa ipotesi definì un processo stocastico che generava ancora una distribuzione lognormale.
Una prima importante osservazione è dunque che la distribuzione lognormale non è legata da una corrispondenza biunivoca alla legge di Gibrat.
Analizzati questi due processi che portano alla distribuzione lognormale ne vedremo altri due, che si basano ancora sulla legge di Gibrat, ma le affiancano altre ipotesi e generano una distribuzione di Pareto.
Champernowne (1937, ripubblicato nel 1973) fu il primo a collegare la legge degli effetti proporzionali con la distribuzione di Pareto e fu il primo ad osservare che era necessario inglobare nel modello una caratteristica fondamentale dei redditieri, come delle imprese, e precisamente la demografia, con le modalità che vedremo in seguito.
Il modello è descritto da una matrice di transizione in cui le celle rappresentano le probabilità di passare da una classe di reddito ad un'altra, dove le classi sono di uguale ampiezza proporzionale e le probabilità di transizione rispettano la legge di Gibrat. Viene inoltre imposta una importante condizione di stabilità e precisamente il valore atteso delle variazioni deve essere negativo; questa ipotesi, che indirizza negativamente le variazioni percentuali uguali per tutte le imprese, porta ad una diminuzione della concentrazione.
Nonostante la sua intuizione riguardo all'introduzione della demografia, il modello di Champernowne presenta l'inconveniente, da lui stesso ammesso, di non dare un chiaro significato economico al parametro della distribuzione di Pareto, da cui sappiamo dipendere inversamente l'indice di concentrazione di Gini.
Simon al contrario formula il suo modello (1955) dando un ruolo preciso al parametro suddetto, esso infatti dipende inversamente dal tasso di nuovi ingressi. La legge di Gibrat viene applicata alle classi, non alle singole unità, e porta, unitamente ad un tasso

costante di nuovi ingressi, ad una distribuzione di Yule che, per valori elevati della variabile, approssima una Pareto.
Questa relazione tra nuovi ingressi e parametro della Pareto implica che la concentrazione subisca delle variazioni legate sostanzialmente al tasso medesimo.
Presenteremo infine un altro modello di Simon (1955, 1960), in diverse versioni, che oltre agli ingressi ingloba anche le uscite, in cui a seconda delle ipotesi sui tassi di crescita, di entrata e di uscita si giunge ancora alla Yule oppure anche ad altre distribuzioni note. Questo modello è particolarmente attuale in quanto descrive un'economia a crescita nulla.

2 La letteratura.

Come si è detto affronteremo i processi stocastici che si fondano sulla legge di Gibrat, nelle versioni che specificheremo in seguito.
Gibrat, nel 1931, ha dato il via allo studio del legame tra processi stocastici, distribuzioni statistiche e leggi economiche e per questo motivo la sua legge viene assunta come benchmark in tutti i successivi lavori sull'argomento, che sono costruiti attorno ad essa, a sue variazioni o alla sua negazione.
Tra questi, classici fondamentali sono le monografie di Aitchison e Brown sulla distribuzione lognormale (1957), di Steindl sulla distribuzione di Pareto (1965) e la raccolta di saggi di Ijiri e Simon (1977) sulle distribuzioni asimmetriche.
Per quanto riguarda la fiducia nel modellare la distribuzione della dimensione delle imprese con distribuzioni statistiche note, la posizione della letteratura si può così riassumere:

- anni '50-'70: forte convinzione (Hart e Prais 1956, Steindl 1965, Quandt 1966, Ijiri e Simon 1977);
- anni 80-90 : crescente scetticismo (Schmalensee 1992, Sutton 1998);
- oggigiorno: rinnovato ottimismo anche alla luce dei progressi fatti dalla statistica computazionale (Ganugi et al. 2002, Cipollini e Ganugi 2001 , Marsili 2001, Marsili e Salter 2002, Axtell 2001, Stanley et al. 1995).

Sono inoltre numerosi, a partire dal fondamentale '*The Analysis of Business Concentration: a Statistical Approach*' di Hart e Prais (1956), i lavori empirici che mirano a verificare la validità della legge di Gibrat con diversi metodi, che possiamo riassumere nei seguenti filoni:

- adattamento e analisi delle distribuzioni compatibili con la legge;
- modelli econometrici;
- analisi delle matrici di transizione;
- analisi delle distribuzioni dei tassi di crescita.

Tali metodi sono spesso stati utilizzati congiuntamente dare più forza ai risultati ottenuti, a partire da Hart e Prais, pionieri anche in questo senso, che utilizzano praticamente tutte le tecniche statistiche sopra citate, riprese e affinate nel successivo cinquantennio. Essi adattano la distribuzione lognormale alla distribuzione delle imprese quotate al London Stock Exchange dal 1885 al 1950, misurandone la dimensione con la valutazione di mercato. Tale adattamento risulta soddisfacente e viene accompagnato dall'analisi dei tassi di crescita su tre porzioni della distribuzione (imprese piccole, medie e grandi), che dimostra come tali tassi si mantengano piuttosto stabili al variare della classe dimensionale, concludendo quindi per la validità della

legge (si veda per questo Scherer, 1980). Adattano ancora la distribuzione lognormale, oltre alla Pareto, Steindl (1965) e Quandt (1966). Il primo opera con distribuzioni di diverso tipo (patrimonio, imprese del manufatturiero, commercio al dettaglio); in diversi paesi (Germania, Svezia, Austria, USA); con diverse variabili (turnover, fatturato, attivo, numero di addetti) per concludere che '*As a very rough appoximation the Gibrat law holds'*. Il secondo invece utilizza il totale attivo per un gruppo di imprese ottenute unendo le informazioni di diverse fonti come 'Fortune', la 'Million dollar directory' di Dun e Bradstreet e il 'Moody's manual', ma evidenzia che è molto difficile testare nel suo caso la legge dato lo scarso numero di unità a sua disposizione e i complicati processi di nascite e morti che vi operano.
Stanley et al. (1995) adattano la lognormale alla distribuzione del fatturato di circa 4000 imprese del manufatturiero in USA (dati di Compustat per 5 anni) per trovare che, la distribuzione ben si adatta, nonostante il ramo superiore sia troppo leggero (piuttosto che troppo pesante come rilevato dai precedenti studi).
Il lavoro di Stanley viene criticato da Axtell (2001) per la scelta della banca dati pesantemente spostata verso le grandi imprese: egli adatta con successo una Zipf alla distribuzione degli addetti di 5.5 milioni di imprese USA (Census Bureau, due anni) e ne deduce che '*a common mechanism of firm growth operate on firms of all sizes'*.
Ancora risultati opposti a Stanley trova Marsili (2001) adattando con soddisfazione la Pareto alla distribuzione (per numero di addetti) delle imprese censite in Olanda dal 1978 al 1992; in un secondo lavoro con Salter (2002) concentra invece l'attenzione sulla distribuzione dei rendimenti sulle innovazioni, non adattabile alla Pareto.
Per quanto riguarda l'Italia Brusco (1979) studia i tassi di crescita, per numero di addetti, di circa 1250 piccole imprese operanti in provincia di Modena dal 1966 al 1977, verificando che in uno dei tre settori analizzati è possibile riconoscere l'operare di un processo alla Gibrat mentre non si può dire lo stesso per gli altri due. Egli mette comunque in evidenza come '*venuta meno la legge, resti uno straordinario strumento di indagine'*. Barca (1985) deduce, da un adattamento quasi perfetto della distribuzione di Pareto alle distribuzioni di tre censimenti ('61, '71, '81) che '*la forma della distribuzione dimensionale degli stabilimenti è influenzata molto fortemente dall'operare nel tempo, in modo cumulato, di fattori stocastici'* Egli investiga poi gli scostamenti della distribuzione empirica da quella teorica e riscontra la presenza di impedimenti alla crescita per le imprese più grandi.
Ganugi et al. (2002) trovano soddisfacente l'adattamento della lognormale all'universo delle imprese del Meccanico in Italia. Essi inoltre rappresentano e confrontano la distribuzione dei tassi in tre macro gruppi (piccole, medie, grandi imprese) e rilevano, come Barca, la presenza di impedimenti alla crescita per le imprese più grandi, escludendo così l'azione di un processo Gibratiano.
In presenza di ampi panel longitudinali, i modelli usati sono affini a quello già proposto da Hart e Prais, precisamente il modello di regressione verso la media di Francis Galton (si vedano Hart e Oulton, 1995). È questo il caso di Audretsch, Vivarelli e Santarelli (1999) che seguono un gruppo di imprese neonate per i successivi 8 anni di vita (1570 imprese da un dataset Inps), e verificano che la legge di Gibrat non può essere accettata per la maggiorparte dei settori analizzati. In un articolo successivo Lotti, Santarelli e Vivarelli (2001) riutilizzano lo stesso dataset per mostrare che anche se negli anni immediatamente seguenti la nascita la legge viene rifiutata, negli anni successivi i tassi di crescita convergono verso un processo alla Gibrat. Più recentemente Piergiovanni et

al. (2002) verificano che alcuni settori nei servizi per l'ospitalità seguono la legge di Gibrat.
Ancora regressioni log-lineari sono stimate da Hall (1987), Dunne e Hughes (1994), Hart e Oulton (1995, 1999), Vennet (2001). Cefis et al. (2001) ne propongono una specificazione, nel senso che i parametri del modello non sono gli stessi al variare delle imprese, come supposto nei precedenti lavori, ma possono variare. La variabile utilizzata è il fatturato delle imprese del settore farmaceutico nei sette maggiori mercati occidentali, e la conclusione del lavoro è che la crescita delle imprese non è erratica
Le matrici di transizione sono forse lo strumento meno usato: si vedano per questo Hart e Prais (1956), Ijiri e Simon (1977) e Marsili (2001) che ne mettono in evidenza l'importanza come misura dinamica di concentrazione, e infine Dunne e Hughes (1994).
Per quanto riguarda il filo conduttore di questo lavoro, il legame tra processi stocastici e concentrazione, è in primo luogo attraverso l'analisi dei modelli stocastici che abbiamo individuato in questo aspetto il loro tratto distintivo, tratteggiato precisamente nelle diverse ipotesi al contorno. Abbiamo quindi focalizzato l'attenzione sui parametri che, nelle diverse distribuzioni, sono spia dei movimenti della concentrazione. Hart e Prais (1956), proponendosi come scopo l'investigazione dell'evoluzione nella concentrazione all'interno del loro dataset, conducono questo studio attraverso l'analisi della varianza logaritmica. Steindl (1965) presta attenzione non solo alle variazioni del parametro nella Pareto, ma anche alle variazioni nel campo di adattamento della stessa. Marsili (2001) ribadisce l'importanza di distinguere tra misure di concentrazione statiche (quale sarebbe tale parametro) e dinamiche; inoltre segue i cambiamenti nella concentrazione, come pure nella bontà di adattamento della Pareto, nei periodi di recessione.
Ci sembra infine significativo quanto scritto da Brusco (1979):'*le ricerche empiriche sulla legge di Gibrat hanno due categorie di destinatari: gli studiosi di teoria dell'impresa e gli studiosi dei processi di concentrazione. I primi possono usare i risultati per smentire o ritenere confermata questa o quella ipotesi sull'andamento della curva dei costi di lungo periodo, o questa o quella ipotesi sulle caratteristiche del sentiero di sviluppo scelto dall'impresa; i secondi possono utilizzare i risultati per dare una valutazione del ruolo avuto dal caso nei processi di concentrazione'*

3 Due processi di crescita che portano alla distribuzione lognormale.

3.1 Il modello di Gibrat classico: varianza logaritmica crescente.

Un processo stocastico è una qualsiasi famiglia infinita di variabili casuali $\xi(t)$, dove t varia in un insieme T; se T è una successione infinita numerabile, allora il processo è stocastico con parametro discreto, se T è un intervallo il processo stocastico è a parametro continuo.
Consideriamo una variabile causale positiva, che sia il risultato di un processo stocastico discreto e che rappresenta nel nostro caso la dimensione di impresa.
Supponiamo che la dimensione di un'impresa j sia inizialmente uguale ad X_{j0} e dopo il t-simo passo del processo sia uguale ad X_{jt}, raggiungendo il suo valore finale X_{jn} dopo n passi.
Il caso generale è il seguente.
Al t-simo passo la variazione nella variabile è data da una proporzione casuale di una funzione $\phi(X_{jt-1})$ del valore X_{jt-1} assunto; perciò

$$X_{jt}- X_{jt-1}=\varepsilon_{jt}\phi(X_{jt-1}) \qquad (1)$$

dove le ε_{jt} si distribuiscono identicamente, sono indipendenti tra loro e anche dalle X_{jt}.
Ad ogni passo la variazione dimensionale dipende dal valore assunto eccetto per il caso $\phi(X)=1$ o il caso banale $\phi(X)=0$.
Per arrivare alla legge di Gibrat dobbiamo porre $\phi(X)=X$, cioè considerare il caso in cui la variazione nella variabile è una proporzione casuale del valore della variabile stessa.
Diremo perciò che una variabile soggetta ad un processo di variazione segue la legge di Gibrat se *ad ogni passo del processo la variazione nella variabile è una proporzione casuale del precedente valore della variabile.*
In questo caso la (1) diventa

$$X_{jt}-X_{jt-1}=\varepsilon_{jt}X_{jt-1}. \tag{2}$$

Ora la (2) si può riscrivere come

$$\frac{X_{jt}-X_{jt-1}}{X_{jt-1}}=\varepsilon_{jt}, \tag{3}$$

in modo che, sommando su tutti gli step, si ottenga

$$\sum_{t=1}^{n}\frac{X_{jt}-X_{jt-1}}{X_{jt-1}}=\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_{jt}. \tag{4}$$

Ora, supponendo che gli effetti ad ogni step (cioè le variazioni relative) siano piccoli, la sommatoria diventa un integrale:

$$\sum_{t=1}^{n}\frac{X_{jt}-X_{jt-1}}{X_{jt-1}}\sim\int_{X_{j0}}^{X_{jn}}\frac{dX}{X}=\log X_{jn}-\log X_{j0}, \tag{5}$$

e quindi:

$$\log X_{jn}=\log X_{j0}+\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_{jt}. \tag{6}$$

Ora, per il teorema centrale del limite, $\log X_{jn}$ è asintoticamente distribuita come una normale e perciò X_{jn} è asintoticamente distribuita come una lognormale.
Più formalmente, enunciamo il fondamentale:

Teorema centrale del limite (forma moltiplicativa)
Sia $\{X_t\}$ una successione di variabili indipendenti, a valori positivi, aventi la stessa distribuzione di probabilità e tali che, per ogni t
$E\{\log X_t\}=\mu$ *e*
$E[(\log X_t-\mu)^2]=\sigma^2$
ed esistano entrambe, allora il prodotto $\prod_{t=1}^{n}X_t$ *è asintoticamente distribuito come una distribuzione lognormale* $\Lambda(n\mu,n\sigma^2)$.

Teorema.
Una variabile soggetta alla legge degli effetti proporzionali tende, per n grande, a distribuirsi come una lognormale, ammesso che la successione $X_0, 1+\varepsilon_1,\dots,1+\varepsilon_2,\dots$ *soddisfi le condizioni del teorema centrale del limite (forma moltiplicativa).*
Dim.
Dalla (2):
$X_t=(\varepsilon_t+1)X_{t-1}$,

Perciò :
$X_n = X_0(\varepsilon_1+1)\ldots(\varepsilon_n+1)$,
e il risultato segue dal teorema centrale del limite.

Una volta posta in evidenza la relazione stringente tra il processo di crescita illustrato e la distribuzione lognormale della dimensione d'impresa, si pone il problema delle implicazioni di tale processo sull'economia sottostante: ci chiediamo dunque se tale processo generi o meno concentrazione.
Si è visto che l'incremento del logaritmo della dimensione di un'impresa j al tempo t, $\log X_{jn} - \log X_{j0}$, è uguale alla somma di variabili casuali ε_{jt}. Possiamo affermare perciò che il tasso di crescita della stessa impresa è una variabile casuale indipendente dalla dimensione iniziale.
In base a questo assunto imprese di grandi o piccole dimensioni possono crescere dello stesso tasso:
'size has no effect upon the expected percentage growth of a firm' (Simon e Bonini, 1958)
Per analizzare questo problema è inoltre fondamentale indagare su come due importanti misure di concentrazione, l'indice di Lorenz e l'indice di Gini, siano definiti nel caso di una distribuzione lognormale.

3.2 Concentrazione e distribuzione lognormale.

Come è noto, in un diagramma di Lorenz applicato ad una distribuzione di dimensione d'impresa, la proporzione di imprese aventi dimensione minore di un dato valore x è misurata lungo l'ascissa e la proporzione di dimensione totale coperta dalle stesse imprese lungo l'ordinata.
I punti tracciati in corrispondenza dei diversi valori di x formano una curva, detta curva di concentrazione, al di sotto della bisettrice del primo e terzo quadrante, che rivolge la concavità verso l'alto.
In termini statistici la curva descrive la relazione tra la funzione di distribuzione cumulata $F(x)$ e la funzione di distribuzione cumulata del momento primo $F_1(x)$, definita da $F_1(x) = \int_0^x t dF(t) / \int_0^\infty t dF(t)$.
La misura della concentrazione nella distribuzione della dimensione che è naturalmente suggerita dal diagramma di Lorenz è il rapporto tra l'area compresa tra la bisettrice e la curva di concentrazione, e l'area del triangolo sotto la bisettrice. Tale misura varia tra 0 (caso di equidistribuzione) e 1 (caso di concentrazione massima).
La sua definizione formale è la seguente:

$$L = 1 - 2\int_0^\infty F_1(x) dF(x). \qquad (7)$$

Sostituendo nell'equazione (7) la forma esplicita di $F_1(x)$ per una variabile lognormale il cui logaritmo ha varianza σ^2 otteniamo[1]:

[1] Per brevità non abbiamo riportato la dimostrazione di questa relazione, per la quale rimandiamo alla monografia di Aitchison e Brown.

$$L = 2N(\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \mid 0{,}1) - 1\,, \tag{8}$$

cioè la misura di concentrazione di Lorenz è monotonicamente dipendente dal valore della varianza logaritmica della variabile considerata (nel nostro caso la dimensione).
Osserviamo inoltre che il coefficiente della differenza media di Gini si può scrivere come $G=2\alpha L$, dove α è la dimensione media
$\alpha= exp[\mu+(1/2)\sigma^2]$,
che dipende ancora una volta da σ^2.
Segue che la varianza logaritmica, in presenza di una distribuzione lognormale, può e deve essere interpretata come una misura di concentrazione ed è quindi di fondamentale importanza prestare attenzione al suo comportamento nei processi di crescita considerati.
Un classico sulla legge di Gibrat è il lavoro di Hart e Prais (1953), che basano la loro analisi della concentrazione nel processo di crescita precisamente sullo studio della varianza del logaritmo della dimensione. Essi mettono in evidenza come le misure della concentrazione basate sulla varianza siano molto efficaci e si prestino particolarmente ad evidenziare quali sono, nella struttura della distribuzione, le cause stesse delle (eventuali) fluttuazioni nella concentrazione.

La dipendenza evidenziata tra varianza logaritmica e concentrazione può essere messa in evidenza anche analizzando la formula che esprime la dimensione di un'impresa al passo n di un processo che sottostà alla legge di Gibrat:
$X_{jn} = X_{j0}(\varepsilon_{j1}+1)\cdots(\varepsilon_{jn}+1)$.
Date le ipotesi fatte sui fattori al membro destro dell'uguaglianza, cioè che i loro logaritmi si distribuiscano indipendentemente e identicamente con media μ e varianza σ^2, il logaritmo di X_n si distribuisce con media $n\mu$ e varianza $n\sigma^2$.
E' evidente che all'aumentare del numero di passi del processo la varianza logaritmica della variabile aumenta e verrà generata una sequenza di distribuzioni lognormali a varianza crescente.
Ora, poiché nello studio di processi economici si suppone che se una legge opera, deve operare con continuità, la conseguenza di questa continuità sarebbe una varianza sempre crescente e, per quanto osservato sulle misure di concentrazione, un aumento indefinito della concentrazione nel fenomeno in osservazione.
Questo però non avviene nella realtà.
Fin dai primi studi l'evidenza empirica ha rivelato infatti la compatibilità di un modello statistico lognormale della dimensione d'impresa con l'assenza di un processo di concentrazione.
E' in base a questa evidenza che dobbiamo integrare il modello precedente con l'ipotesi cruciale di varianza costante.
Questo, come si vedrà in seguito, implica una correlazione negativa tra il logaritmo della dimensione e il logaritmo delle variabili casuali che descrivono la variazione, cioè le ε_{jt}.

E' a questo punto utile riassumere il percorso finora fatto:
Il processo di crescita alla Gibrat modella un processo di concentrazione, cosa che abbiamo dedotto in due modi:

- dalla semplice osservazione della costituzione del tasso di crescita;

- dall'analisi formale di due importanti misure di concentrazione.

Lo stesso processo alla Gibrat implica che la dimensione dell'impresa si distribuisca come una lognormale.

È importante precisare però che la lognormalità della dimensione delle imprese non corrisponde necessariamente ad un processo di concentrazione nell'economia sottostante, come si vedrà nel prossimo paragrafo.

3.3 Il modello di Kalecki: varianza logaritmica costante.

Come si è detto, per ostacolare il processo di diffusione generato dalla legge di Gibrat legato alla crescita della varianza logaritmica, si può intervenire proprio su quest'ultima. Kalecki, nel '45, è stato il primo ad osservare in un contesto economico che '*the standard deviation of the variate Y* (il logaritmo della dimensione, ndr) *is fully or partly constrained and as a result the random changes are not independent of the values of the variate Y that are subject to them'*. Egli ha quindi formulato un modello stocastico di crescita, in cui si suppone che la varianza dei logaritmi della dimensione sia costante.

Siano $\mu_{X,t-1}$ la media aritmetica della distribuzione dei logaritmi della dimensione al passo *t-1*, e $\mu_{\varepsilon,t}$ la media aritmetica della distribuzione dei logaritmi degli incrementi avvenuti dal passo *t-1* al passo *t*.

Supponiamo che la varianza sia costante prima e dopo l'avvenuto incremento.

Ora la media aritmetica di $\log X_{jt-1}+\log(\varepsilon_{jt}+1)$ è data da $\mu_{X,t-1} + \mu_{\varepsilon,t}$ e la nostra ipotesi di varianza costante si traduce formalmente nella seguente equazione:

$$\frac{1}{n}\sum_j [\log X_{jt-1} + \log(\varepsilon_{jt}+1) - (\mu_{X,t-1} + \mu_{\varepsilon,t})]^2 = \frac{1}{n}\sum_j (\log X_{jt-1} - \mu_{X,t-1})^2 , \qquad (9)$$

ponendo

$Y_{jt-1} = \log X_{jt-1} - \mu_{X,t-1}$,

$y_{jt} = \log(\varepsilon_{jt}+1) - \mu_{\varepsilon,t}$,

avremo

$$\frac{1}{n}\sum_j (Y_{jt-1} + y_{jt})^2 = \frac{1}{n}\sum_j Y_{jt-1}^{\ 2}, \qquad (10)$$

da cui

$$2\sum_j Y_{jt-1} y_{jt} = -\sum_j y_{jt}^{\ 2} . \qquad (11)$$

Dunque è provata una correlazione negativa tra l'incremento casuale della dimensione e la dimensione stessa.

L'ipotesi più immediata sulla forma di questa relazione è che sia lineare, cioè del tipo :

$$y_t = -\alpha_t Y_{t-1} + z_t \qquad (12)$$

dove α_t è un parametro costante e z_t una variabile casuale indipendente da Y_{t-1}; è stato eliminato l'indice *j* per alleggerire le notazioni.

Sostituendo questa espressione nel primo membro della (11) risulta, data l'indipendenza di z_t e Y_{t-1}, che implica $-2\sum Y_{t-1} z_t = 0$,

$$\alpha_t = \frac{\sum y_t^{\ 2}}{2\sum Y_{t-1}^{\ 2}} \qquad (13)$$

Ora poiché il momento secondo di y_t è minore di quello di Y_{t-1}, si ha

$0 < 1-\alpha_t < 1$

e, riscrivendo la (12)

$Y_{t-1} + y_t = (1-\alpha_t)Y_{t-1} + z_t$

Perciò, ad ogni step

$Y_1 = Y_0 + y_1 = Y_0(1-\alpha_1) + z_1$

$Y_2 = Y_0 + y_1 + y_2 = Y_0(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) + z_1(1-\alpha_2) + z_2$

....

....

$Y_n = Y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_n = Y_0(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\ldots(1-\alpha_n) + z_1(1-\alpha_2)\ldots(1-\alpha_n) + \ldots + z_{n-1}(1-\alpha_n) + z_n.$

Poiché $0 < 1-\alpha_k < 1$ per ogni k tra 1 ed n, se $n \to \infty$ il valore assoluto di tutte le componenti è piccolo se confrontato con la varianza di Y_n (a meno che z_k non tenda a zero allo stesso tempo).

Dunque abbiamo ottenuto Y_n come la somma di piccoli incrementi casuali $z_k\Pi(1-\alpha_k)$ che sono indipendenti uno dall'altro e dal valore iniziale Y_0. Per il teorema centrale del limite la distribuzione degli Y_t sarà perciò normale.

4 Alcuni processi stocastici che portano alla distribuzione di Pareto.

4.1 Il modello di Champernowne: una catena Markoviana.

Descriviamo ora un processo stocastico che conduce alla distribuzione di Pareto, proposto per la prima volta da Champernowne nel 1937 (ripubblicato nel 1973), relativamente alla distribuzione del reddito, ripreso come punto di riferimento da Steindl (1965) e da Simon (1960), da Arnold (1983) e il cui impiego alla dimensione d'impresa è stato suggerito da Quandt (1966).

La caratteristica fondamentale di questo modello è che il valore atteso delle possibili transizioni tra una classe dimensionale e l'altra è negativo, quindi è sempre una contrazione della dimensione, da qualsiasi dimensione si parta.

Un modello come questo ben si presta ad essere adattato, per una verifica empirica, ad un panel chiuso di imprese italiane, seguite per un numero sufficientemente esteso di anni e caratterizzate da una perdita di peso nelle fasce dimensionali più grandi.

Lo stesso modello non risulterebbe adatto a riassumere le caratteristiche di fondo di altri sistemi industriali per le quali lo shrinkage non rappresenta un fenomeno così consolidato come in Italia.

Supponiamo che la dimensione di un impresa si sviluppi attraverso il tempo seguendo un processo Markoviano, in cui lo stato del processo che si sviluppa nel tempo è la dimensione annuale di un'impresa.

Diamo subito l'importante definizione di Catena Markoviana.

Sia $\{U_0, U_1, \ldots\}$ una successione di variabili casuali che prendono valore in qualche insieme numerabile S, che chiameremo insieme degli stati.

Ogni U_j è una variabile casuale discreta che assume uno tra N possibili valori, dove $N=|S|$ ed N può essere anche $+\infty$.

Definizione: Il processo U è una catena di Markov se soddisfa la condizione di Markov, cioè

$$\mathrm{P}(U_j=s|U_0=U_0, U_1=U_1, \ldots, U_{n-1}=U_{n-1}) = \mathrm{P}(U_j=s|\ U_{n-1}=U_{n-1})$$

per ogni $n \geq 1$ e per ogni $s, U_0, U_1, \ldots, U_{n-1} \in S$.

Steindl ben chiarisce questa definizione nel modo seguente:

consideriamo un insieme di prove che avvengono una dopo l'altra; se il risultato in ciascuna prova è indipendente da quello nelle prove precedenti, abbiamo prove indipendenti; se il risultato di una prova è direttamente influenzato solo dall'ultima prova avvenuta, ma non dalle precedenti, allora abbiamo una catena di Markov.
Anche in una catena di Markov tutte le prove contribuiscono al risultato dell'ultima, ma indirettamente, nel senso che per ogni prova l'intera storia delle prove precedenti è contenuta nel risultato della prova immediatamente precedente.
Il risultato di una prova può essere uno qualsiasi di un insieme di stati. Il numero di stati in una catena di Markov può essere finito o infinito.
Ad ogni prova, il sistema passa da uno stato all'altro.
La possibilità di passare dallo stato r allo stato s si chiama probabilità di transizione e si indica solitamente con p_{rs}. Tutte le transizioni possibili in una prova vengono riportate in una matrice, detta matrice di transizione, siffatta:

$$P_{rs} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdot \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdot \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

dove le p_{rs} sono tali da soddisfare $\sum_s p_{rs} = 1, \quad p_{rs} \geq 0$.

Le righe e le colonne corrispondono ai vari possibili stati del sistema, ed ogni elemento è una probabilità di transizione. Gli elementi diagonali, per esempio, rappresentano la probabilità che i rispettivi stati rimangano invariati in quella prova.
Diremo che la catena U è omogenea se la matrice di transizione è la stessa a tutti passi del processo. Una catena Markoviana omogenea, come si suppone sia in questo processo, è perciò univocamente determinata da un'unica matrice di transizione, che ne descrive completamente l' evoluzione.

Consideriamo stati che si succedono l'un l'altro nel tempo: la classe dimensionale cambia ad intervalli discreti di tempo e perciò rimane fissa per la durata dell'intervallo di tempo, che si può ragionevolmente supporre di un anno. Ogni stato è completamente determinato dal suo stato precedente e da un elemento casuale.
Nel nostro caso le righe della matrice sono le classi dimensionali in un determinato anno, le colonne le classi dimensionali dell'anno successivo e il generico elemento p_{rs} della matrice dà la probabilità di un passaggio dalla classe dimensionale r alla classe dimensionale s da un anno all'anno dopo.

Gli intervalli dimensionali saranno di uguale ampiezza su scala logaritmica, quindi di uguale ampiezza proporzionale; ne consegue che lo stato j corrisponderà ad una dimensione nell'intervallo $(10^{jh}Y_{min},\ 10^{(j+1)h}Y_{min})$, dove Y_{min} è la dimensione minima considerata ed h è un numero reale positivo. In questo modo su scala logaritmica tutte le classi avranno ampiezza h. In questo modo, imprese che occupano posizioni analoghe in classi differenti subiranno uguali passaggi di classi in corrispondenza di uguali aumenti proporzionali.

Sia ora $X_s(t)$ il numero di imprese nella classe dimensionale s all'anno t , il processo è allora descritto dalla seguente relazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} X_1(t+1)\\ X_2(t+1)\\ .\\ X_s(t+1)\\ .\\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s}\cdots\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2s}\cdots\\ . & & & \cdots\\ p_{s1} & p_{s2} & \cdots & p_{ss}\cdots\\ . \; . & . \; . & \cdots & . \; . \; . \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} X_1(t)\\ X_2(t)\\ .\\ X_s(t)\\ .\\ . \end{pmatrix}$$

Applichiamo la legge di Gibrat alle probabilità di transizione:
la probabilità di un passaggio da una classe dimensionale all'altra dipende solo dall'ampiezza del salto e non dalla posizione di partenza.
In altre parole la probabilità p_{rs} è una funzione solo di *s-r* perciò, ponendo
s-r=u
possiamo determinare l'intera matrice dalla conoscenza di p_u, che è indipendente da *r*.
Mettendo in risalto questa indipendenza, la matrice suddetta si trasforma nella seguente:

$$\begin{pmatrix} X_1(t+1)\\ X_2(t+1)\\ .\\ X_s(t+1)\\ .\\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_{s-1}\cdots\\ p_{-1} & p_0 & p_1 & p_{s-2}\cdots\\ . & p_{-1} & & \cdots\\ p_{1-s} & p_{2-s} & \cdots & p_0 \;\cdots\\ . \; . & . \; . & \cdots & . \; . \; . \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} X_1(t)\\ X_2(t)\\ .\\ X_s(t)\\ .\\ . \end{pmatrix}$$

E per ogni classe dimensionale il processo si sviluppa secondo la formula:

$$X_s(t+1) = \sum_{u=-\infty}^{s} X_{s-u}(t)\, p_{s-u,s}(t) \tag{14}$$

Dunque il numero di imprese nella classe dimensionale *s* al tempo *t+1* è dato dalla somma del numero di imprese che all'istante *t* erano nella classe *r* ponderato con la probabilità di passaggio dalla classe *r* alla classe *s*; tale somma, considerando possibili variazioni di qualsiasi ampiezza, va da $r = 0$ a $r = s + \infty = +\infty$.
Nel modello però si impone che, fissato *n*, le transizioni siano possibili solo tra *–n* ed 1: in questa ipotesi dunque p_u è la probabilità di una impresa di diminuire la sua dimensione di *u* livelli verso il basso (per un massimo di *n* e ammesso che *u >-r*) o di 1 verso l'alto. Si pone perciò $p_u=0$ se *u >1 o u <-n.*
Per avere un'idea di come è fatta una matrice di transizione corrispondente a queste ipotesi riportiamo quella proposta da Champernowne con n=5:

$$\begin{pmatrix} 1-p_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .0 \\ 1-p_1-p_0 & p_0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & .0 \\ p_{-5}+p_{-4}+p_{-3}+p_{-2} & p_{-1} & p_0 & p_1 \cdots & 0 & 0 & 0 & .0 \\ p_{-5}+p_{-4}+p_{-3} & p_{-2} & p_{-1} & p_0 & p_1 & 0 & 0 & .0 \\ \ldots\ldots\ldots p_{-5}+p_{-4} & \ldots\ldots\ldots p_{-3} & p_{-2} & p_{-1} & p_0 & p_1 & 0 & 0 \\ \ldots\ldots p_{-5} & \ldots\ldots\ldots p_{-4} & p_{-3} & p_{-2} & p_{-1} & p_0 & p_1 & 0 \\ .\;\ldots\ldots 0 & \ldots\ldots\ldots p_{-5} & p_{-4} & p_{-3} & p_{-2} & p_{-1} & p_0 & p_1 \\ \ldots\ldots 0 & \ldots\ldots\ldots 0 & p_{-5} & p_{-4} & p_{-3} & p_{-2} & p_{-1} & p_0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo questa matrice: per conciliare la proprietà delle matrici di transizione che la somma delle probabilità di riga deve dare 1 con la costanza della probabilità di passaggio al variare della dimensione, questa seconda ipotesi va ristretta alle classi dimensionali r per cui $r>n$. Dalla classe numero *1* non potrò spostarmi di n livelli verso il basso, per non oltrepassare il livello minimo, e così via, per cui la probabilità di restare nella stessa classe è massima per la classe più piccola e diventa costante solo dalla seconda classe in poi. Analogamente la probabilità di slittare di una classe verso il basso diventerà costante solo dalla terza classe in poi. Procedendo in questo modo vediamo che tutte le probabilità di transizione diventano costanti solo al raggiungimento della classe r-sima, dove $r=n+1$.
Questa matrice mette in chiaro un aspetto importante del modello:
la legge di Gibrat è applicata a partire da un certo livello in poi, precisamente dal livello r per cui $r=n+1$.
Un'altra caratteristica del modello, che abbiamo già anticipato dando la definizione di catena omogenea, è che *'the prospects of shifts upwards and downwards along the ladder of income ranges (differ little as between the occupant of different income ranges, and) differ little from year to year'*. Questa ipotesi, a detta dello stesso Champernowne, ci porta lontano dalla realtà ma è necessaria per garantire la trattabilità del modello da un punto di vista matematico.

Se il processo continua per un tempo sufficientemente lungo, la distribuzione della dimensione raggiunge un equilibrio nel quale l'azione della matrice di transizione lascia invariata la distribuzione, che a questo punto prende il nome di *distribuzione stazionaria* della catena.
Si dice infatti che un vettore π è una *distribuzione stazionaria* della catena se π ha entrate $(\pi_j : j \in S)$ tali che
a) $\pi_j \geq 0$ per ogni j, e $\sum_j \pi_j = 1$;
b) $\pi = \pi P$, cioè $\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$ per ogni j.
Queste distribuzioni sono chiamate stazionarie perché iterando la (b) si ottiene
$\pi P^2 = (\pi P)P = \pi P = \pi$
e perciò
$\pi P^n = \pi$ per tutti gli $n \geq 0$.

Avremo dunque

$$X_s = \sum_{u=-n}^{1} p_u X_{s-u} \qquad (s > 0) \tag{15}$$

e

$$X_0 = \sum_{u=-n}^{1} q_u X_{-u} \text{ con } q_u = \sum_{v=-n}^{u} p_v \,, \tag{16}$$

dove naturalmente con $s=0$ si intende la classe più piccola.
La somma adesso va da $r=s-1$ ad $r=s+n$, ed esplicitando la (15) si ottiene che il numero di imprese nella classe dimensionale s è legato al numero di imprese nelle altre classi dalla seguente equazione

$$X_s = \sum_{r=s-1}^{s+n} p_{s-r} X_r = p_1 X_{s-1} + p_0 X_s + p_{-1} X_{s+1} + ... + p_{-n} X_{s+n} \,, \tag{17}$$

osserviamo ancora una volta che non c'è dipendenza dalla particolare classe di partenza, infatti al secondo membro dell'equazione non compare *r*.
Questa è un'equazione alle differenze finite la cui soluzione si ottiene ponendo $X_s=z^s$; si ottiene in questo modo l'equazione caratteristica

$$g(z)=\sum_{u=-n}^{1} p_u z^{1-u} - z = 0 \ . \tag{18}$$

Osserviamo che poiché $g(0)=p_1>0$ e $g(1)=0$, per la regola dei segni di Cartesio, l'equazione caratteristica ha solo due radici reali positive di cui evidentemente una è l'unità.
Se indichiamo l'altra con *b*, la distribuzione di equilibrio richiesta è

$$X_s = b^s \ . \tag{19}$$

Ora affinché *b* vari tra *0* e *1* (per avere la convergenza della somma) bisogna introdurre la seguente condizione *di stabilità*, che implica che il valore atteso delle variazioni sia negativo:

$$g'(1) = -\sum_{u=-n}^{1} u p_u > 0 \tag{20}$$

poiché $g(0)=p_1>0$ e dalla condizione di stabilità $g'(1)>0$, l'altra radice deve necessariamente soddisfare
$0<b<1$.
Sommando entrambi i membri della (19), al tendere di *s* all'infinito otteniamo

$$\sum X_s = \sum b^s \tag{21}$$

che equivale a dire che il numero totale di imprese è uguale a 1/(1-b).
Dunque per un qualsiasi dato numero di imprese *N* la distribuzione di equilibrio diventa

$$X_s = N(1-b)b^s \ . \tag{22}$$

Si è visto che l'ampiezza dell'intervallo per la costruzione delle classi dimensionali è 10^h e la dimensione minima considerata Y_{min}; X_s è allora il numero di imprese nella classe dimensionale *s* il cui limite inferiore è dato da

$$Y_s=10^{sh}Y_{min} \tag{23}$$

e passando ai logaritmi

$$\log Y_s = sh + \log Y_{min}. \tag{24}$$

Il numero di imprese con dimensione superiore a Y_s (cioè la funzione di distribuzione retrocumulata) si ottiene dalla progressione geometrica della (22)

$$F(Y_s)=Nb^s. \tag{25}$$

Passando ancora ai logaritmi

$$\log F(Y_s) = \log N + s\log b = \log N + \left(\frac{\log Y_s - \log Y_{\min}}{h}\right)\log b \ , \tag{26}$$

da cui, ponendo

$$\alpha = -\frac{1}{h}\log b, \gamma = \log N + \alpha \log Y_{\min} \tag{27}$$

si ottiene infine la legge di Pareto

$$\log F(Y_s) = \gamma - \alpha \log Y_s. \tag{28}$$

Riepilogando quanto visto possiamo dire che le ipotesi fondamentali per ottenere una Pareto da un modello di crescita sono:

i) il processo deve essere Markoviano con gli stati corrispondenti alle classi dimensionali, tali classi sono di uguale ampiezza logaritmica;
ii) deve esistere un livello dimensionale minimo;
iii) sopra il livello minimo le prospettive di variazioni percentuali della dimensione sono indipendenti dalla dimensione di partenza (legge degli Effetti Proporzionali);
iv) il processo deve essere non dissipativo (ipotesi di valore atteso delle variazioni negativo).

Champernowne nel suo lavoro mostra anche che, per semplici variazioni delle ipotesi fatte, per esempio permettendo il passaggio verso l'alto di più di un livello all'anno, ma mantenendo sempre l'ipotesi (iv) si ottiene ancora, asintoticamente, una distribuzione di Pareto.

4.2 Concentrazione e distribuzione di Pareto.

Il filo conduttore di questo lavoro è come abbiamo visto l'esistenza di una relazione stringente tra distribuzioni statistiche e modelli stocastici di crescita da un lato e processi di concentrazione dall'altro. Abbiamo già messo in evidenza che la lognormalità può essere supportata da due processi opposti: uno con varianza crescente, che implica concentrazione, e uno con varianza costante che non la implica.
Non possiamo però ripetere le osservazioni sulla varianza del logaritmo della dimensione che, se in caso di lognormalità ci dà una prima descrizione dell'intera distribuzione essendone un parametro, nel caso della Pareto non è uno strumento altrettanto efficace (si vedano Champernowne, nel commento al lavoro di Hart e Prais (1956) e Guarini, Tassinari (2000)). Non sussiste inoltre, per quest'ultima, lo stesso rapporto di dipendenza tra i coefficienti di concentrazione di Lorenz e Gini e la varianza logaritmica.
Per capire bene come interpretare la concentrazione in una distribuzione di Pareto, andiamo a studiarla attraverso quello che viene chiamato Zipf Plot.
Lo Zipf plot è la rappresentazione della dimensione sul rango, in doppia scala logaritmica. Si dimostra che tale rappresentazione è equivalente alla rappresentazione della dimensione sulle frequenze retrocumulate (Ijiri e Simon (1977); Stanley 1995).
L'utilità di una rappresentazione in scala doppio logaritmica è particolarmente evidente per la distribuzione di Pareto che in tale scala risulta una retta.
Se dunque esprimiamo la relazione tra la dimensione x di un'impresa e la sua posizione r nella popolazione cui appartiene, otteniamo, nel caso della Pareto

$$xr^{\beta} = N$$

dove β ed N sono costanti, ed N è la dimensione dell'impresa più grande, a cui viene assegnato rango 1.
Da questa espressione possiamo vedere che il rapporto tra le dimensioni di due imprese x_1/x_2 è uguale al reciproco di $(r_1/r_2)^{\beta}$ cioè il rapporto delle rispettive posizioni potenziato di β.
Dunque più grande è β e maggiore è la differenza in dimensione tra due imprese con un dato rapporto tra le posizioni: β esprime la potenza relativa di una grande impresa rispetto ad una piccola impresa. E dunque al crescere di β cresce la concentrazione.
Passando ai logaritmi avremo

$$log x = log N - \beta log r$$

La concentrazione, in una distribuzione di Pareto, si legge dunque nel parametro di pendenza della retta ottenuta in scala doppio logaritmica.
Tale parametro, indicato con β nella rappresentazione Rank-Size, corrisponde all'inverso del parametro di pendenza α utilizzato nella descrizione del processo stocastico.
Ecco perché solitamente si dice che l'indice di Gini è legato al parametro di pendenza della Pareto da una dipendenza inversa e precisamente:
$G=1/(2\alpha-1)$
Mentre è legato alla pendenza della retta Rank-Size dalla
$G=1/(2/\beta-1)$
Inoltre, la curva di Lorenz è legata al parametro α dalla:
$L(u) = 1-(1-u)^{(\alpha-1)/\alpha}$ con $u \in [0,1]$.
In ogni caso scelta la rappresentazione, basterà attenersi alle considerazioni precedenti per misurare attraverso l'indice di Gini la concentrazione in una Pareto.

Si è visto che la distribuzione di Pareto si può ottenere come distribuzione di equilibrio di un processo stocastico accompagnato da alcune ipotesi tra cui la legge di Gibrat. Quali sarebbero gli effetti dell'operare nel tempo di tale legge sulla distribuzione di Pareto e, più precisamente, sulla concentrazione?
Supponiamo che la Pareto adatti bene la distribuzione empirica:
$\log x=\log N-\beta\log r$,
e che ciascuna impresa subisca un aumento nella dimensione proporzionalmente costante pari a k, avremo che la legge di Pareto subisce la seguente modifica
$\log(x+xk)=\log(x(k+1))=\log x+\log(k+1)= \log N-\beta\log r+\log(k+1)$.
È chiaro che il parametro β non subisce alcun cambiamento e si verifica semplicemente una traslazione lungo l'asse delle ordinate. Tale traslazione va comunque considerata allarmante, nel senso che evidenzia un aumento della *disuguaglianza* fra le imprese, non segnalata dal coefficiente di Gini che, come la pendenza della retta, resta costante.
La distribuzione di Pareto è perciò compatibile con un modello di crescita alla Gibrat e senza variazioni nella concentrazione:
'If we plot the firm size distribution of the 500 largest firms…we see that the concentration as measured by the shape of the Pareto curve is relatively unchanged. This supports Gibrat's law-that the growth is independent of size. The annual growth of the firms takes the form of a parallell upward shift in the size distribution, the degree of shift depending on the growth rate that is applicable to all firms regardless of their size' (Ijiri e Simon, 19..).

Vediamo infine come Champernowne definisce la struttura del parametro α, definito come
$$\alpha = -\frac{1}{h}\log b\,.$$
Esso dipende dall'ampiezza proporzionale di ciascuna classe, h, e dalla soluzione positiva dell'equazione di equilibrio, b; non solo è difficile trovare un significato economico ad un parametro così definito, ma non si riesce nemmeno a spiegare il legame del parametro stesso con gli indici di concentrazione.
Champernowne stesso ammette che *'although the models discussed above throw some light on the reasons why an approximate obedience to Pareto's law is so often found in*

actual income distributions, they do not throw much light on the mecanism determining the actual values observed for Pareto's α'.
È proprio il coefficiente α, di cui si è precisato il ruolo importante, che segna lo stacco fra il modello appena descritto e quelli formulati successivamente per giustificare la Pareto.
Il lavoro di Champernowne viene spesso associato a panel con ingressi e uscite perché il suo autore è stato il primo a osservare che la legge di Gibrat e un livello di concentrazione non in crescita potevano coesistere solo in un panel con demografia. In realtà è importante sottolineare che lo scarto tra il suo modello e quelli seguenti (Steindl 1965, Simon 1955, 1960), sta proprio nel significato di α, e precisamente nella formalizzazione della struttura del panel attraverso il parametro α. Champernowne infatti ricorre ad un escamotage ponendo, accanto alla legge di Gibrat, ipotesi che danno ad un panel chiuso (come è evidente dal numero fisso dei redditi) caratteristiche da panel aperto, il fatto cioè che alla morte di un'impresa con reddito elevato ne subentri una nuova con reddito basso e da qui lo shrinkage. Egli però non mette affatto in connessione il parametro α con tali ipotesi.
In ogni caso la condizione di stabilità imposta, che il valore atteso delle variazioni sia negativo, ha evidentemente l'effetto di diminuire la disuguaglianza tra le imprese.
Nei modelli successivi α ha al contrario un significato preciso legato agli ingressi e alle uscite, sia nei vari modelli di Simon (con modalità che vedremo nei prossimi paragrafi) sia nel più complesso modello di Steindl; in quest'ultimo anche la concentrazione e le sue oscillazioni dipendono sostanzialmente dai tassi di entrata e uscita delle unità e dal loro rapporto con il tasso di crescita.

4.3 I modelli di Simon.

4.3.1 Un processo con ingressi.

Simon (1955, 1960) ha presentato una trattazione unitaria di curve altamente asimmetriche riscontrate in una varietà di ambiti, dal biologico al sociologico all'economico.
In particolare ha considerato la distribuzione delle parole nella prosa e ha formulato un modello stocastico che porta ad una classe di distribuzioni da lui chiamata di Yule.
Si vedrà poi che per valori grandi della variabile, cioè nel ramo destro, tale distribuzione approssima la distribuzione di Pareto.
Per meglio comprenderne il legame con la legge di Gibrat, abbiamo qui esplicitato il modello di Simon utilizzando direttamente come variabile casuale la dimensione d'impresa.
La legge di Gibrat sarà assunta in forma debole:
si suppone che *la proporzionalità della crescita attesa in corrispondenza della dimensione assunta valga non per ogni impresa ma solo per l'aggregato di tutte le imprese in una data classe dimensionale.*
Tale ipotesi garantisce che la distribuzione sia altamente asimmetrica, con un lungo ramo superiore.
Va osservato che Simon, nella costruzione dei modelli, procede in modo da lui stesso definito 'euristico', verificando poi la correttezza delle soluzioni mediante sostituzione senza risolvere le equazioni alle differenze. Si noterà pertanto una differenza di impostazione rispetto alla trattazione dei precedenti modelli.

Si consideri un'economia che comprenda nel suo insieme un numero di unità dimensionali pari a k. È importante precisare, affinché la nostra 'traduzione' sia coerente con il modello di Simon, che k è un numero puro, non è accompagnato cioè da alcuna unità di misura.
Se decidiamo di misurare la dimensione di impresa con una variabile di bilancio, dunque, con unità dimensionale non intendiamo 1 euro, ma una unità dimensionale che da sola possa costituire una nuova impresa. Dunque ad esempio diremo che l' economia ha dimensione 100, non 100 milioni di Euro, se la nostra unità dimensionale è il milione di Euro.
Questo problema con il modello originale di Simon non si poneva in quanto egli operava con numero di parole e numero di rappresentazioni delle parole: era perciò possibile, quando necessario (e vedremo che lo sarà), fare delle operazioni tra queste due grandezze (in particolare somme) ed ottenere ancora numeri puri. Nel caso della dimensione d'impresa invece non avrebbe senso sommare milioni di euro con numero di imprese.
Il problema di decidere quale sia il limite per la costituzione di questa unità dimensionale, e quindi di una nuova impresa, è molto interessante anche nel caso in cui si pensi che la migliore misura della dimensione sia il numero di addetti. In questo caso infatti si pone il problema delle imprese senza impiegati, che non sarebbe contemplato dal modello di Simon.
Nella trattazione successiva indicheremo quindi con il termine dimensione un insieme di unità dimensionali.
Indicheremo con $f_i(k)$ il numero di imprese con dimensione i presenti nell' economia di dimensione k, avendo identificato la dimensione di tutte le imprese di una classe con un valore rappresentativo, per esempio il suo valore centrale (è necessario fare questo passaggio per seguire il procedimento di Simon perché la distribuzione di Yule è discreta e perciò costituita da modalità e frequenze, non da classi di modalità e frequenze).
Un'altra osservazione importante va fatta a proposito dei passi del processo stocastico che nei modelli precedenti abbiamo identificato con istanti temporali. In questo modello i passi del processo sono segnati dagli aumenti dimensionali dell' economia, corrispondono quindi ai passaggi da k a $k+1$, da $k+1$ a $k+2$ etc; il numero totale di unità dimensionali quindi può essere visto come 'tempo', nel senso che l'output di unità dimensionale è costante per unità di tempo.

Il modello si fonda sulle seguenti ipotesi.

Ipotesi(I): La probabilità che la $(k+1)$-sima unità dimensionale sia assegnata ad un'impresa di dimensione i è proporzionale ad $if_i(k)$, cioè al numero totale di imprese di dimensione i moltiplicate per la loro dimensione (quindi, in pratica, alla dimensione globale delle imprese di dimensione i). Siamo nell' ipotesi di Gibrat in forma debole.

Ipotesi(II): C'è una probabilità costante, α, che la $(k+1)$-sima unità dimensionale vada a costituire una nuova impresa.

Andiamo a vedere nel dettaglio come da queste ipotesi si arriva alla distribuzione suddetta.
Da *(I)* segue che

$$E\{f_i(k+1)\}-f_i(k)=U(k)\ \{(i-1)f_{i-1}(k)-if_i(k)\},\quad i=2,\dots,k+1, \tag{29}$$

Dove E indica il valore atteso e $U(k)$ è un fattore normalizzante. Se la $(k+1)$-sima unità è assegnata ad un'impresa di dimensione i-1, $f_i(k+1)$ aumenterà in media di una impresa rispetto a $f_i(k)$, e la probabilità che questo accada è, per l'ipotesi *(I),* proporzionale a $(i-1)\, f_{i-1}(k)$.
Se la $(k+1)$-sima unità va ad un'impresa di dimensione i, la classe di dimensione i perde quella impresa, quindi $f_i(k+1)$ decrescerà, e la probabilità di questo è sempre per l'ipotesi *(I),* proporzionale a $if_i(k)$; mentre in tutti gli altri casi,
$E\{f_i(k+1)\}=f_i(k)$.
Da *(I)* e *(II)* otteniamo nello stesso modo

$$E\{f_1(k+1)\}-f_1(k)=\alpha-U(k)\, f_1(k), \qquad 0<\alpha<1. \tag{30}$$

Ora, poiché il nostro interesse è concentrato sulle distribuzioni stazionarie, possiamo sostituire i valori attesi nelle precedenti equazioni con le frequenze reali.
Effettuando questa sostituzione otteniamo, al posto della (29) e della (30),

$$f_i(k+1)-f_i(k)= U(k)\, \{(i-1)\, f_{i-1}(k) - if_i(k)\}, \quad i=2,\dots,k+1, \tag{31}$$

$$f_1(k+1)-f_1(k)=\alpha-U(k)f_1(k), \qquad 0<\alpha<1 \tag{32}$$

Dove le f ora rappresentano i valori attesi.
Vediamo ora com'è fatto il fattore normalizzante $U(k)$.
Poiché $U(k)if_i(k)$ è la probabilità che la $(k+1)$-sima unità vada ad un'impresa di dimensione i, si avrà

$$\sum_{i=1}^{k} U(k) if_i(k) = U(k) \sum_{i=1}^{k} if_i(k) = 1-\alpha \tag{33}$$

Infatti la probabilità totale, cioè 1, è data dalla probabilità che l'unità vada a formare un'impresa nuova, cioè α, più la probabilità che l'unità vada ad una impresa per ognuna delle classi dimensionali, cioè $U(k)\sum_{i=1}^{k} if_i(k)$.
Ma $\sum_{i=1}^{k} if_i(k)$ è la dimensione totale delle imprese dell' economia considerata, perciò

$$\sum_{i=1}^{k} if_i(k) = k, \tag{34}$$

da cui

$$U(k) = \frac{1-\alpha}{k}. \tag{35}$$

Sostituendo questa espressione nella (31) e nella (32) si possono risolvere esplicitamente le equazioni alle differenze.
Simon invece mostra che è più 'comodo' imporre la condizione di stazionarietà (tutte le frequenze crescono nella stessa proporzione con la dimensione totale delle imprese k), ricavarsi le soluzioni in base ad essa e verificare tramite sostituzione che sono corrette.
Tale condizione di stazionarietà corrisponde a

$$\frac{f_i(k+1)}{f_i(k)} = \frac{k+1}{k}, \text{ per ogni } i \text{ e } k; \tag{36}$$

da questo segue che

$$\frac{f_i(k)}{f_{i-1}(k)} = \frac{f_i(k+1)}{f_{i-1}(k+1)} = v(i), \tag{37}$$

dove $v(i)$ non dipende da k,
e anche che le frequenze relative

$f_i = \frac{f_i(k)}{n_k}$, dove $n_k = \alpha k$ è il numero totale di imprese le cui dimensioni sommate danno k, sono indipendenti da k.

Sostituendo la (35), la (36), e la (37) nella (31), si ottiene

$$\left(\frac{k+1}{k} - 1\right) = \frac{(1-\alpha)}{k}\left\{\frac{(i-1)}{v(i)} - i\right\}. \tag{38}$$

Risolvendo per $v(i)$ si ottiene

$$v(i) = \frac{(1-\alpha)(i-1)}{1+(1-\alpha)i} = \frac{f_i}{f_{i-1}}, \quad \text{i=2,…,k}, \tag{39}$$

mentre per i=1

$$f_1 = \frac{1}{2-\alpha}. \tag{40}$$

Poiché

$$f_i = v(i) f_{i-1} = v(i)v(i-1)\cdots v(2) f_1$$

si ottiene, ponendo

$$\rho = \frac{1}{1-\alpha}, \quad 1<\rho<\infty$$

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{(i-1)(i-2)\cdots 2\cdot 1}{(i+\rho)(i+\rho-1)\cdots(2+\rho)} f_1 \\ &= \frac{\Gamma(i)\Gamma(\rho+2)}{\Gamma(i+\rho+1)} f_1 \\ &= (1+\rho)B(i,\rho+1) f_1 \qquad i=2,\dots,k. \end{aligned} \tag{41}$$

Questo perché, per una proprietà della funzione Γ

$$\begin{aligned} \Gamma(i+\rho+1) &= (i+\rho)\Gamma(i+\rho) \\ &= (i+\rho)(i+\rho-1)\cdots(2+\rho)\Gamma(\rho+2) \end{aligned}$$

e, considerando la funzione Beta di i, $\rho+1$

$$B(i,\rho+1) = \int_0^1 \tau^{i-1}(1-\tau)^{\rho}\, d\tau = \frac{\Gamma(i)\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(i+\rho+1)}, \qquad 0<i,\ 0<\rho<\infty.$$

Se poniamo $A = f_1(1+\rho)$

E sostituiamo nella (41) otteniamo

$$f_i = AB(i,\rho+1), \tag{42}$$

che Simon chiama *distribuzione di Yule*.

Si dimostra che $A=\rho$ e che f_i è una distribuzione propria per $\rho>1$.

Per sostituzione si verifica inoltre che la (41) è una soluzione della (31)

Vediamo ora come sono legate la Yule e la Pareto:

è una nota proprietà della funzione Gamma che, per $i \to \infty$

$$\frac{\Gamma(i)}{\Gamma(i+k)} \sim i^{-k}$$

e perciò

$$f_i \sim A\Gamma(\rho+1) i^{-(\rho+1)}.$$

Dunque la soluzione a cui converge il processo stocastico descritto approssima, nel ramo destro, la distribuzione di Pareto.

Simon esplicita poi la distribuzione di Yule nel modo seguente

$$f(i)=\prod_{j=1}^{i-1}\frac{j}{j+\rho}\frac{\rho}{i+\rho}=\frac{\rho\rho!(i-1)!}{(i+\rho)!}. \tag{43}$$

Il rapporto tra gli indici di concentrazione e il parametro ρ della Pareto rimane lo stesso di cui si è parlato in precedenza.

La novità è che Simon esplicita chiaramente il nesso tra il parametro ρ della distribuzione, la concentrazione e l'ingresso di nuove imprese che è la peculiarità del suo modello.

Infatti, sia G la crescita netta della dimensione di tutte le imprese di un' economia in un dato periodo, e sia G_n quella parte della crescita netta attribuibile alle nuove imprese, allora si ha che

$$\rho=\frac{1}{1-G_n/G}=\frac{1}{1-\alpha}. \tag{44}$$

Al limite, quando il contributo delle nuove imprese tende a zero, ρ tende ad uno e la concentrazione nell'economia è massima. Maggiore sarà il contributo delle nuove imprese e maggiore sarà il coefficiente di Pareto e perciò minore la concentrazione.

In questo modello perciò la concentrazione è esplicitamente funzione decrescente del tasso di ingresso delle nuove imprese, anche perché dalla condizione (36) si evince che tutte le frequenze crescono nella stessa proporzione con la dimensione totale delle imprese k. Siamo nel caso particolare in cui i rapporti tra le dimensioni (in questo caso delle classi) restano costanti nel tempo: la concentrazione come misurata dal Gini non varia per effetto della crescita delle imprese fisse nel panel.

4.3.2 Un processo con ingressi e uscite.

Simon ha formulato un altro modello in cui descrive l'evoluzione di una sezione di testo che cambia in continuazione, da un lato per l'aggiunta di nuove parole e dall'altro per l'esclusione di altre, rimanendo però sempre della stessa lunghezza.

Si tratta dunque di un modello con ingressi e uscite che si adatta ad un'economia statica, senza crescita.

Se torniamo a ragionare in termini di dimensione d'impresa, ad un settore di imprese si aggiungono unità dimensionali in accordo con le ipotesi *(I)* e *(II)* già viste, quindi in accordo con la legge di Gibrat, ma contemporaneamente si tolgono imprese allo stesso tasso con cui si suppone che entrino quelle nuove. Questo processo porta ancora alla distribuzione di Yule.

A tale modello, in cui si suppone che tutte le imprese abbiano la stessa probabilità di estinzione, ne è stato in seguito aggiunto un secondo che porta ad una generalizzazione della distribuzione di Yule che, specificando i parametri coinvolti, può dare origine anche ad altre distribuzioni note.

In questa seconda versione si suppone che ogni impresa abbia una probabilità di perdere unità dimensionali che è proporzionale non solo alla sua dimensione corrente ma anche al numero di imprese con la sua stessa dimensione. Inoltre, come si vedrà in seguito, anche l'ipotesi *(I)*, che corrispondeva alla legge di Gibrat, è stata modificata.

- Prima versione.

Le ipotesi *(I)* e *(II)* vengono lasciate invariate, mentre l'ipotesi sulle uscite viene così definita:

Ipotesi (III). Se viene tolta un'unità dimensionale ad un'impresa di dimensione *i* l' impresa viene eliminata e la probabilità che un'impresa di dimensione *i* sia eliminata è αf_i. f_i indica, come in precedenza, le frequenze relative, cioè $f_i = \frac{f_i(k)}{n_k}$, mentre α è uguale alla probabilità di formazione di nuove imprese.

Il processo può essere rappresentato dalla seguente equazione:

$k[f_i(m+1)-f_i(m)]=(1-\alpha)[(i-1)\, f_{i-1}(m)-if_i(m)]-f_i(m),$

nella quale *m* è il numero di unità dimensionali che sono state aggiunte, e contemporaneamente sottratte, al settore economico di dimensione *k*. È importante notare che in questo modello la dimensione del settore rimane costante.

Cerchiamo di mettere in evidenza dove viene usata la terza ipotesi: la precedente equazione è equivalente alla seguente

$$f_i(m+1)-f_i(m)=\frac{1-\alpha}{k}[(i-1)f_{i-1}(m)-if_i(m)]-\alpha f_i. \qquad (45)$$

L'equazione (45) si differenzia dalla (31) perché al membro destro si toglie anche la probabilità αf_i che sia eliminata un'impresa di dimensione *i*.

Crediamo sia utile ripetere la lettura di tale equazione sulla falsa riga di quella data da Simon per il modello con i soli ingressi, aggiungendo la terza ipotesi:

se la *(m+1)*-sima unità è assegnata ad un'impresa di dimensione *i-1*, $f_i(m+1)$ aumenterà rispetto a $f_i(m)$, e la probabilità che questo accada è, per l'ipotesi *(I),* proporzionale a $(i-1)\, f_{i-1}(m)$; se la *(m+1)*-sima unità va ad un'impresa di dimensione *i* o viene eliminata da un'impresa di dimensione *i*, $f_i(m+1)$ decrescerà, e la probabilità di questo è nel primo caso proporzionale a $if_i(m)$ e nel secondo ad αf_i. In tutti gli altri casi, $f_i(m+1)= f_i(m)$.

Un equilibrio stazionario di questa equazione è dato da

$$f_i =(1- \alpha)[(i-1)\, f_{i-1}-if_i] \qquad (46)$$

$$f_1=1- (1- \alpha)\, f_1 \qquad (47)$$

ottenute ponendo il membro destro dell'equazione (45) uguale a zero.

Le due equazioni precedenti sono in realtà solo una forma differente della (31) e della (32), e la soluzione per questo processo casuale è perciò ancora *la distribuzione di Yule*.

Simon fa notare come questo processo stocastico da lui ideato e quello di Champernowne abbiano essenzialmente la stessa struttura.

- Seconda versione.

Anche questa volta, come nella prima versione, il modello incorpora ingressi e uscite e perciò ha uno stato stazionario con crescita nulla, nel senso che la dimensione del settore rimane costante.

In questa seconda forma si suppone però che sia le perdite che i guadagni siano governati non più da un'ipotesi di Gibrat ma da un'ipotesi che ricalca piuttosto il modello di Kalecki: *'The more general process (...) has two additional parameters, d and c, that would allow it to be fitted to distributions whose mechanisms do not quite satisfy the Gibrat assumption'* (Ijiri and Simon,1977, p.55).

Per gli ingressi si fa l'ipotesi che la probabilità che la prossima unità aggiunta vada ad un'impresa di dimensione *i* è proporzionale a *(i+c)f(i)*. Resta invariata l'ipotesi riguardo alla formazione di una nuova impresa che rimane uguale ad α. La probabilità che la

prossima unità venga eliminata da un'impresa di dimensione *i* è d'altra parte proporzionale a $(i+d)f(i)$. I termini *c* e *d* sono parametri costanti (quindi uguali per tutte le imprese) positivi ma piccoli.
Le probabilità definite in questo modo dipendono non solo dalla dimensione totale della classe ma anche dal numero di imprese che la compongono (e quindi si tiene conto di come le unità sono suddivise nelle classi, attraverso $cf(i)$), in seguito vedremo le implicazioni di tale ipotesi.
La relazione stazionaria è:

$$f_i(m+1)-f_i(m)=\frac{1-\alpha}{k+cn_k}[(i-1+c)f_{i-1}(m)-(i+c)f_i(m)]-\frac{1}{k+dn_k}[(i+d)f_i(m)-(i+d+1)f_{i+1}(m)]=0 \tag{48}$$

Osserviamo il membro destro dell'equazione: il primo termine descrive la variazione nelle frequenze corrispondenti ad una data dimensione quando le unità vengono guadagnate da un'impresa; il secondo termine la variazione nelle frequenze quando le unità vengono perse da un'impresa. I termini $\frac{1-\alpha}{k+cn_k}$ e $\frac{1}{k+dn_k}$ sono le costanti normalizzanti che corrispondono all'$U(k)$ del primo processo di Simon e si ottengono analogamente ad esso.
Una soluzione a questa equazione, indipendente da *m*, è

$$f_i(m)=A\lambda^i B(i+c,d-c+1), \tag{49}$$

dove

$$\lambda=\frac{(1-\alpha)(k+dn_k)}{k+cn_k},$$

e *B* è la funzione beta.
Se confrontiamo la (49) con la distribuzione di Yule (42) vediamo che la prima ha un fattore di convergenza, λ, che nella seconda non c'è.
Il ρ della Yule è stato sostituito da $\rho^*=d-c$ che dovrebbe essere maggiore di zero. In particolare, se *d* non è troppo grande rispetto a *c*, avremo $\rho^*<1$, cosa che nei precedenti modelli non era possibile.
Definendo i parametri *c* e *d* possiamo ottenere una varietà di distribuzioni diverse.
Per esempio, se $c=d$ l'equilibrio stazionario di questa equazione porta ad generalizzazione della distribuzione logaritmica di Fisher.

$$f(i)=A(1-\alpha)^i/(i+c),$$

dove A è una costante normalizzante.
Un caso particolare è quello in cui $c=d=0$, che equivale a considerare entrambi gli ingressi e le uscite come governati dalla legge di Gibrat, con il seguente equilibrio stazionario

$$f_i(m+1)-f_i(m)=\frac{1-\alpha}{k}[(i-1)f_{i-1}(m)-if_i(m)]-\frac{1}{k}[if_i(m)-(i+1)f_{i+1}(m)] \tag{50}$$

che porta ancora ad una distribuzione logaritmica di Fisher:

$$f(i)=\frac{[-\log(\alpha)]\cdot(1-\alpha)^i}{i}. \tag{51}$$

D'altra parte, se *d* tende a zero e *c* cresce senza limite, otteniamo come processo limite

$$f_i(m)=\frac{1-\alpha}{n_k}[f_{i-1}-f_i]-\frac{1}{k}[if_i-(i+1)f_{i+1}]=0 \tag{52}$$

E la distribuzione d'equilibrio per questa equazione è la distribuzione di Poisson:
$f(i)=A\lambda^i/i.$ (53)

Si è visto dunque che scegliendo i parametri in modo appropriato questo modello descrive un'economia in cui i guadagni di alcune imprese semplicemente bilanciano le perdite di altre. In questo caso, come visto sopra, si arriverà ad una distribuzione logaritmica di Fisher invece che a una Yule.
Ora, dato il fattore esponenziale presente nella Fisher, essa si comporterà nel ramo superiore come una distribuzione geometrica e quindi convergerà più rapidamente a zero, per $\rho > 1$, rispetto alla Pareto.
Se, in base ai modelli di Simon, consideriamo la Pareto come la distribuzione più adatta a descrivere un'economia in crescita e la Fisher un'economia statica, dal confronto tra queste due distribuzioni emerge che ci sarebbero relativamente meno imprese di dimensione molto grandi o molto piccole, e relativamente più imprese di dimensione media in un'economia statica che in un'economia in crescita.
Di conseguenza ci sarà un grado minore di concentrazione nell'economia statica, rispetto a quella crescente, che si rispecchierà in una concavità nella distribuzione cumulativa, in doppia scala logaritmica, verso l'origine.
Inoltre ρ, che come sappiamo è l'indicatore della concentrazione nella distribuzione di Pareto, risulta dipendente non più da α, cioè dal tasso d'ingresso delle nuove imprese, ma da d-c, quindi dal confronto tra i parametri che concorrono a determinare la probabilità che un'unità dimensionale venga rispettivamente eliminata o aggiunta ad una data impresa, in ultima analisi dai processi di crescita interni alle imprese.
Per ottenere una Yule da questo modello è comunque necessario che d sia maggiore di c, vale a dire che prevalga la riduzione della dimensione rispetto alla sua crescita, per le imprese che già esistono.
Vale la pena di riprendere la dinamica di crescita specificata da Simon in quest'ultima versione: oltre a dipendere dalla dimensione globale della classe dimensionale ora il tasso di crescita positiva e negativa dipende anche dal numero d'imprese che la compongono, che si suppone decrescere al crescere della dimensione, sopra alla soglia minima. Facciamo un esempio: supponiamo di avere 100 imprese di dimensione 1 ($f(1)=100$) e 10 imprese di dimensione 10 ($f(10)=10$); secondo le ipotesi del modello, la probabilità che una unità dimensionale sia sottratta ad una impresa di dimensione 1 è proporzionale a $(1+d)100=100+d100$, mentre la stessa probabilità per un'impresa di dimensione 10 è proporzionale a $(10+d)10=100+d10$, dunque è minore nel secondo caso.
Laddove si fosse mantenuta la proporzionalità solo alla dimensione globale della classe, invece, le due probabilità sarebbero state entrambe proporzionali a 100.
Allo stesso modo cambia anche l'ipotesi sulla probabilità di assegnazione delle nuove unità, viene infatti accresciuta la probabilità che le nuove unità vadano alle piccole imprese, piuttosto che alle grosse.
In questo modo si assegnano una probabilità di sopravvivenza minore e una probabilità di crescita maggiore alle imprese piccole, che equivale a mettere da parte l'ipotesi di Gibrat per adottare quella di Kalecki, creando in questo modo un dispositivo anti-concentrazione.

L'aspetto che vogliamo rimarcare, di quest'ultimo modello, è che descrive un'economia senza crescita: '*Today, the possibility of an economy without such growth is a serious topic of discussion'* (Ijiri e Simon , 1977, intr.); senz'altro molto attuale.

5 Conclusioni

Abbiamo visto in questo lavoro alcuni processi stocastici che conducono, nel tempo, alla distribuzione di Pareto e alla distribuzione lognormale, e abbiamo cercato di chiarire quali meccanismi economici possono descrivere e attraverso quali parametri la distribuzione 'parli' della concentrazione.
Abbiamo evidenziato come le stesse distribuzioni possano rimandare a processi di crescita diversi e quindi come sia necessario affiancare all'adattamento della distribuzione altri strumenti di analisi, messi in evidenza dai modelli stessi, come la varianza logaritmica nel caso della lognormale e il parametro α della Pareto, o ancora le probabilità elementi delle matrici di transizione.
In particolare è stato sottolineato che la distribuzione lognormale può risultare da due processi opposti: quello di Gibrat, che conduce ad un aumento della concentrazione, segnalata dall'aumento della varianza logaritmica della dimensione; quello di Kalecki, che comporta un blocco nell'aumento della concentrazione a causa dell'ipotesi di varianza logaritmica costante. Per quanto riguarda la distribuzione di Pareto sono stati analizzati i modelli di Champernowne e di Simon: se il primo implica una diminuzione della concentrazione dovuta all'ipotesi di valore atteso delle variazioni negativo, il secondo lega questo aspetto al costante ingresso di nuove imprese nel panel.

Un concetto importante che vogliamo mettere in evidenza è che ipotizzare che le dinamiche di crescita di una determinata economia siano ben descritte da processi stocastici non significa escludere che agiscano in contemporanea anche componenti di tipo sistematico. Steindl (1965) ben descrive questo problema: '*We speak of random variables, which are a central concept of stochastic processes; here we do not mean anything free from bias, because random variables do embody systematic influences as well as an element of chance. In contrast to determinate quantities they do not have one and only one value with certainty, but they take different values with different probabilities…the chance factors work in a certain framework of arrangements and rules which corresponds to the systematic influences in economics'*

Per quanto riguarda il seguito di questo lavoro, ci si propone di procedere secondo due direzioni
1. Verifica empirica dei modelli proposti:
lo scopo di questa verifica empirica è, in primo luogo, quello di capire se nelle dinamiche d'impresa agiscano elementi stocastici, cioè se la distribuzione sia ben descritta da una variabile casuale. In secondo luogo sono da interpretare gli eventuali scostamenti della distribuzione empirica da quella teorica, ovvero se vi siano impedimenti alla crescita per particolari fasce dimensionali e se questi impedimenti siano previsti o meno dal modello. È già stato pubblicato un working paper in questa stessa serie (Ganugi, Grossi, Crosato, 2002)
in cui si va a verificare l'adattabilità dei primi tre modelli qui analizzati sull'universo delle imprese del Meccanico e dell'ICT in Italia (panel fisso). Si intende continuare

lungo questo filone anche per panel con demografia, utilizzando a questo fine i modelli di Simon;
si presenta interessante l'opportunità di verificare la compatibilità dei risultati ottenuti usando diverse variabili dimensionali, in particolare il numero di addetti contro le variabili di bilancio;
sarebbe infine auspicabile cercare di riconciliare, come suggerito da Quandt (1966), da Ijiri e Simon (1977) e da Scherer (1980), l'approccio stocastico e l'approccio di teoria della produzione al problema della dimensione d'impresa, attraverso uno studio empirico comparato. Questo ultimo proposito, non ancora affrontato in letteratura, è sicuramente il più ostico da affrontare.

2. Analisi di altri modelli teorici:
per quanto riguarda i panel con demografia, Steindl (1965) ha costruito un modello che, considerando l'impresa come una popolazione di clienti, conduce ad una Pareto in cui il parametro è completamente determinato dai tassi di ingresso e di uscita e dal loro rapporto con il tasso di crescita;
si vuole studiare inoltre la possibilità di adattare altre distribuzioni alla dimensione d'impresa, e in ultimo ai tassi di crescita delle imprese, dati i recenti sviluppi in letteratura (Gabaix 2001).

Bibliografia

Aitchison J., Brown J.A.C., 1957, *The lognormal distribution (with special references to its use in economics)*, Cambridge University Press, Cambridge.

Arnold B.,C, 1983, *Pareto distributions*, International Co-operative Publishing House.

Audretsch D.B., Santarelli E., Vivarelli M., 1999, *Start-up size and industrial dynamics: some evidence from Italian manufacturing*, International Journal of Industrial Organization, 17 , pp. 965-983.

Axtell R., 2001, *Zipf distribution of U.S. firm sizes*, Science, vol. 293, 7 .

Balakrishnan N., Johnson N.L., Kotz S., 1994, *Continuos Univariate distributions,* Wiley New York.

Barca F., 1985, *Tendenze nella struttura dimensionale dell'industria italiana: una verifica empirica del 'Modello di specializzazione flessibile'*, Politica Economica 1, pp.71-109.

Brakman S., Garretsen H., Van Marrewijk C., Van Den Berg M., 1999, *The return of Zipf: towards a further understanding of the rank-size distribution,* Journal of Regional Science, vol 39, no.1, pp.183-213.

Brusco S, Giovannetti E., Malagoli W., 1979, *La relazione tra dimensione e saggio di sviluppo nelle imprese industriali: una ricerca empirica,* Università degli Studi di Modena, Studi e Ricerche dell'Istituto Economico, No.5.

Cefis E., Ciccarelli M., Orsenigo L., 2001, *The growth of firms: from Gibrat's legacy to Gibrat's fallacy*, working paper.

Champernowne, D.G., 1973, *The distribution of Income between Persons*, Cambridge University Press.

Cox D.R., Miller H.D., 1965, *The theory of stochastic processes,* Chapman and Hall.

Dunne p., Hughes A., 1994, *Age, size growth and survival: UK companies in the 1980s*, The Journal of Industrial Economics, XLII.

Cipollini F., Ganugi P., 2001, *The "true" distribution of Industrial Districts: a non Parametric Analysis,* paper presentato al CAED di Aarhus.

Feller W., 1971, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Wiley & Sons, New York.

Gabaix X., 2001, *Power laws and the origin of the business cycle,* working paper.

Ganugi P., Grossi L., Gozzi G., 2002, *La distribuzione della dimensione delle società meccaniche dell'Italia: un'analisi spaziale su un panel fisso*, Working Paper.

Ganugi P., Grossi L., Crosato L., 2003, *Firm size distributions and stochastic growth models: a comparison between ICT and Mechanical Italian Companies,* Quaderni del dipartimento di Scienze Economiche e Sociali, n.4, Università Cattolica del Sacro Cuore, Piacenza.

Ganugi P. Grossi L., Gozzi G., Gagliardi R., 2002, *Growth with statistical Regularity. The evidence of Italian ICT.,* paper presentato allo IAOS di Londra.

Guarini, R., Tassinari F., 2000, *Statistica Economica*, il Mulino, Bologna.

Hart P.E., Oulton N., 1996, *Growth and Size of Firms*, The Economic Journal, Vol.106., pp.1242-52.

Hart P.E.,Oulton N., 1999, *Gibrat, Galton and job generation*, International Journal of the Economics of Business, vol 6, No. 2, pp. 149-164

Hart P.E., Prais S.J., 1956, *The Analysis of Business Concentration: a Statistical Approach*, Jour. Royal Stat. Soc., Ser A., 119, pp. 150-191.

Ijiri Y., Simon H.A., 1964, Interpretations of departures from the Pareto curve firm-size distributions. J Political Economy 82: 315-331.

Ijiri Y., Simon H.A., 1974, Effects of mergers and acquisitions on business firm concentration, Journal of Political Economy, 79, pp. 314-322.

Ijiri Y., Simon H.A., 1977, *Skew Distributions and the Sizes of Business Firms,* North Holland, Amsterdam.

Johnson N.L., Kotz S., Kemp A., 1994, *Univariate Discrete Distributions,* Wiley.

Kalecki M., 1945, *On the Gibrat distribution,* Econometrica, 13, pp. 161-170.
Kattuman P., 1996, *On the Size Distribution of Business of Large Enterprises*, *UK Manufacturing*, Structural Change and Economic Dynamics 7 ,479-494.
Lotti F., Santarelli E., 2001, *Is Firm Growth Proportional? An Appraisal of Firm Size Distribution,* Economics Bulletin, 12, No. 6 pp. 1-7.
Lotti F, Santarelli E., Vivarelli M., 2001, *The Relationship Between Size and Growth: the Case of Italian Newborn Firms*, Applied Economics Letters, 8, pp 451-154.
Marsili O., 2001, *Stability and Turbolence of the Size Distribution of Firms: Evidence from Dutch manufacturing,* paper prepared for the CAED'01 Conference, October 2001, Aarhus, Denmark.
Marsili O., Salter A., 2002, *Is Innovation Democratic? Skewed Distributions and the Return to Innovation in Dutch Manufacturing*, CEREM publications, Netherlands.
Piergiovanni R., Santarelli E., Klomp L., Thurik A.R., 2002, *Gibrat's law and the firm size/ firm growth relationship in Italian Services,* Tinbergen Institute Discussion Paper.
Quandt R.E., 1966, *On the size distribution of firms*, American Economic Review 3, pp.416-432.
Reed W.J., 2001, *The Pareto, Zipf and Other Power Laws*, Economics Letters 74, pp.15-19.
Schmalensee R. 1992 *Inter-industry studies of structure and performance*, in Handbook of Industrial Organization, Schmalensee eds., vol II: .951-100, North Holland, Amsterdam.
Simon H. A., 1955, *On a class of skew distribution functions*, Biometrika 52:425-440.
Simon H. A., 1960, *Some further notes on a class of skew distribution functions,* Information and Control 3:80-88.
Simon H.A., Bonini C.P., 1958, *The size distribution of business firms*, American Economic Review. 48: 607-617.
Stanley M.H.R. et al., 1995, *Zipf Plots and the Size Distribution of Firms*, Economics Letters 49, 453-457.
Steindl J., 1965, *Random Processes and the Growth of Firms,* Griffin, London.
Sutton J. 1998 *Technology and market structure*, MIT Press, Cambridge Massachusetts.
Urzua C., 2000, A *Simple and Efficient Test for Zipf' s Law,* Economics Letters 66, pp. 257-260.
Vennet R.V., 2001, *The Law of Proportionate Effect and OECD Bank Sectors*, Applied Economics 33, pp. 539-546.
Voit J., 2001, *The Growth Dynamics of German Business Firms*, Advances in Complex Systems, Vol.4, No.1, pp.149-162.